



CIPMA - UNESCO CHAIRE



Fonctions de corrélation pour un modèle de théorie des champs à interactions tensorielles avec invariance de Jauge

Fawaaz ZIME YERIMA

METHODS MATHEMATIQUES DE LA THEORIE QUANTIQUE

Centre d'Excellence d'Afrique en Sciences Mathématiques Informatique et Applications

(CEA-SMIA) de l'IMSP

Université d'Abomey-Calavi

01 B.P. 613 Porto-novo, République du Bénin

July 11, 2022

Motivation

2

- La théorie des champs à interactions tensorielles avec invariance de Jauge est une nouvelle alternative pour aborder le fameux problème de la **gravité quantique (GQ)**.
- La **GQ** est une théorie qui cherche à unifier la **mécanique quantique (MQ)** et la **relativité générale (RG)**.
- Dans cette unification, il y a **2** problèmes essentiels qui se posent: la **dynamique d'échelles** qui n'est pas **self-similaire** et le problème de la **renormalisation**.
- Le formalisme Hamiltonien et le formalisme Lagrangien sont non seulement applicables pour la **théorie quantique des champs (TQC)** mais aussi pour la **RG**.

Motivation

3

- En TQC, la dynamique des champs est définie par une **action** $S = \int L$: par le principe de moindre action on retrouve l'équation d'**Euler-Lagrange** du mouvement. De même, on définit la **fonction de partition** $Z = \int e^{iS}$ qui est la fonction génératrice des **fonctions de corrélation**. Ces fonctions de corrélation sont souvent divergentes (modèle standard). Ici, on a des techniques pour pouvoir maîtriser ces divergences par le **principe de la renormalisation**.
- Par contre, en RG le principe variationnel de l'action $S = \int \sqrt{-g} R$ (**Hilbert-Einstein**) conduit à l'équation de **Einstein** donnée par $R_{\mu\nu}^{ic} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$ où $k = \frac{8\pi G}{c^4}$, avec des **fonctions de corrélation** divergentes mais non renormalisables.

Motivation

4

- On a fait le choix de la **théorie des champs à interaction tensorielle (TGFT)** qui est une autre alternative pour aborder le problème de la **GQ**. L'objectif est de construire une théorie **de l'espace-temps** et non **sur l'espace-temps** ($S = \int d^d x L(\phi, \partial_\mu \phi)$ en **TQC** et $S = \int dg_{\mu\nu} \sqrt{-g} R$ en **RG** sont définis sur l'espace-temps).
- En **TGFT**, on fait évoluer les degrés de libertés qui après transition de phase font émerger l'espace-temps tel connu aujourd'hui (on parle de la géométrogénèse).

Motivation

5

- Les degrés de libertés ou champs sont définis sur des **groupes compacts**:

$$\begin{aligned} \varphi : G^{\otimes d} &\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad \mathbb{R} \\ \vec{g} &\mapsto \varphi(\vec{g}) \end{aligned} \quad (1)$$

- La dynamique de ces champs est donnée par le principe variationnel de l'action

$$S = \int L(\varphi, \partial\varphi) d\vec{g} \quad (2)$$

où $\partial\varphi$ est la dérivée par rapport aux éléments du groupe et $d\vec{g}$ est la mesure de Haar.

Objectif

6

But de recherche

Le but de cette présentation est de calculer les fonctions de corrélation.

Remarquons que la question de la **renormalisation** de ces fonctions de corrélation ainsi que la **self similarité** ont été l'objet de plusieurs travaux dans notre groupe de recherche. Par exemple en ce qui concerne la **self-similarité**, elle est abordée par le **groupe de renormalisation fonctionnel (FRG)** [V. Lahoche & al, Phys. Rev. D **98** (2018) no.12, 126010].

Plan

- 1 Préliminaires
- 2 Equation fermée des fonctions de corrélation
- 3 Calcul perturbatif des fonctions de corrélation
- 4 Conclusion et perspectives

Préliminaires

Le modèle

Faisons le choix d'un groupe simple, le groupe $U(1)$ qui est un groupe compact et Abélien et d'une théorie de champ complexe:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : U(1)^{\otimes d} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \vec{g} & \mapsto & \varphi(\vec{g}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \bar{\varphi} : U(1)^{\otimes d} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \vec{g} & \mapsto & \bar{\varphi}(\vec{g}) \end{array} \quad (3)$$

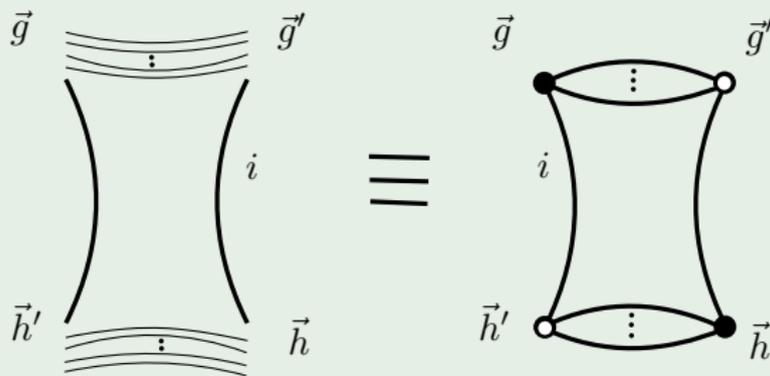
Considérons l'action suivante:

$$\begin{aligned} S[\varphi, \bar{\varphi}] = & \int d\vec{g} \quad \bar{\varphi}(\vec{g})(-\Delta_{\vec{g}} + m^2)\varphi(\vec{g}) \\ & + \lambda \int d\vec{g}d\vec{g}'d\vec{h}d\vec{h}' \bar{\varphi}(\vec{g})\varphi(\vec{g}')\bar{\varphi}(\vec{h})\varphi(\vec{h}')V(\vec{g}, \vec{g}', \vec{h}, \vec{h}'). \end{aligned} \quad (4)$$

Préliminaires

Le modèle

Le vertex V de la théorie choisi dans la limite $\frac{1}{N}$ i.e la limite statistique qui conduit à des diagrammes appelés **melon**. Dans notre cas, puisque l'interaction est de type φ^4 , la représentation diagrammique des **melons** est:



Préliminaires

10

Le modèle

Il est plus facile de travailler dans l'espace des transformées de Fourier de $U(1)$

$$\varphi_{\vec{g}} = \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^d} e^{i\vec{\theta}\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}, \quad \bar{\varphi}_{\vec{g}} = \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\vec{\theta}\vec{p}} \varphi_{\vec{p}}, \quad (5)$$

avec $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_d)$ et $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) / g_k = e^{i\theta_k}$.

Dans cet espace l'action se transcrit en:

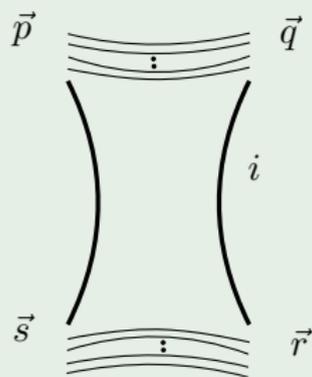
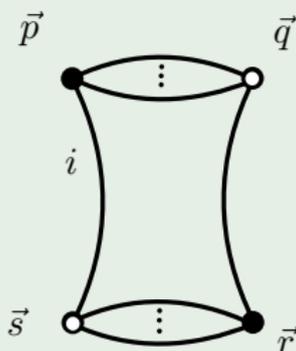
$$S[\varphi, \bar{\varphi}] = \sum_{\vec{p} \in \mathbb{Z}^d} \bar{\varphi}_{\vec{p}} (\vec{p}^2 + m^2) \varphi_{\vec{p}} + \lambda \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}} \bar{\varphi}_{\vec{p}} \varphi_{\vec{q}} \bar{\varphi}_{\vec{r}} \varphi_{\vec{s}} V(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}) \quad (6)$$

Préliminaires

11

Melon

Compte tenu de la forme du **Vertex** choisi, V est le produit des fonctions Deltas.


 \equiv


$$V = \delta_{p_i s_i} \delta_{q_i r_i} \prod_{j \neq i}^d \delta_{p_j q_j} \delta_{r_j s_j}.$$

(7)

Préliminaires

12

Invariance de Jauge

Nous allons ajouter une condition supplémentaire sur les champs appelée **invariance de Jauge**.

$$\forall \vec{g} \in U(1)^{\otimes d} \quad \text{et} \quad h \in U(1), \quad \varphi(\vec{g}) = \varphi(h\vec{g}) = \varphi(\vec{g}h). \quad (8)$$

Dans l'espace des impulsions, cette condition transforme le champ $\varphi_{\vec{p}}$ en $\delta(\sum_i p_i)\varphi_{\vec{p}}$ on parle de contrainte de fermeture.

Exemple de diagramme melonique

14

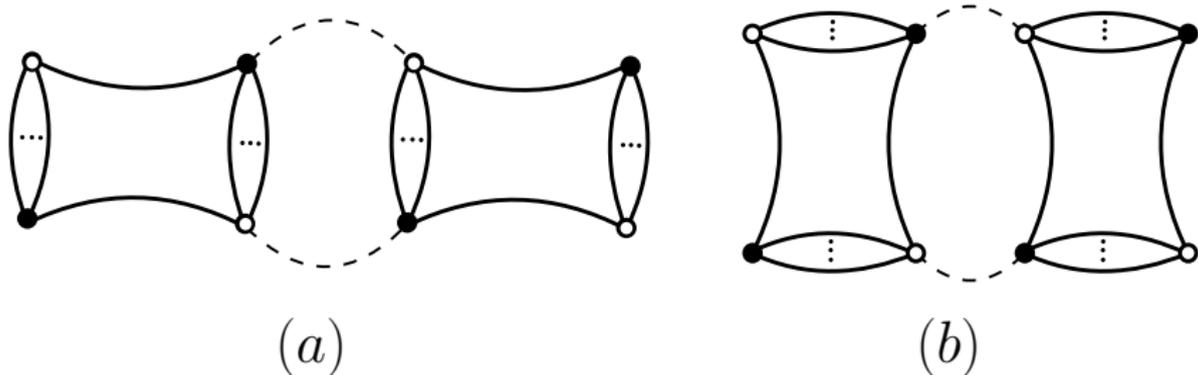


Figure 2 : Deux diagrammes à 4-points construits avec le **melon élémentaire**. En (a) nous avons un graphe melonique et en (b) un graphe non-melonique.

Comptage de faces

15

Pour reconnaître qu'un **diagramme est melonique**, on se concentre sur le **comptage des faces internes**.

Un diagramme est **melonique** si le nombre de **face interne est maximal**. Le nombre de face maximal est donné par la formule:

$$F_m = (d - 1)(L - V + 1). \quad (10)$$

Si nous prenons l'exemple des digrammes ci-dessus, $d = 3$, $L = 2$ et $V = 2$. En appliquant la formule, nous avons

$F_m = (3 - 1)(2 - 2 + 1) = 2$. Or lorsqu'on compte les nombres de face on a $F_a = 2$ pour la figure (a) et $F_b = 1$ pour la figure (b).

Donc seul la figure (a) est un melon car $F_m = F_a$.

Equation fermée de $\Sigma_{\vec{a}}$

16

La représentation diagrammique de $\Sigma_{\vec{a}}$ de l'expression (9) peut se transcrire sous la forme suivante:

$$\Sigma_{\vec{a}} = -Z^2 \lambda \sum_{i=1}^d \sum_{\vec{p}_\perp} \frac{\delta(a_i + \sum \vec{p}_\perp)}{Z(a_i^2 + \vec{p}_\perp^2 + m^2) - \Sigma_{a_i \vec{p}_\perp}}. \quad (11)$$

Conditions sur la masse et sur la fonction d'onde:

$$Z = 1 - \left. \frac{\partial \Sigma_{\vec{p}}}{\partial |\rho|^2} \right|_{\rho=0} \quad \text{et} \quad m^2 = \frac{m_r^2 - \Sigma_{\vec{0}}}{Z} \quad (12)$$

obtenu à partir du développement en série de Taylor d'ordre 2 de Σ :

$$\Sigma_{\vec{a}} = \Sigma_{\vec{0}} + |a|^2 \left. \frac{\partial \Sigma_{\vec{a}}}{\partial |a|^2} \right|_{a=0} + \Sigma_{\vec{a}}^r, \quad (13)$$

Equation fermée de $\Sigma_{\vec{a}}$

17

(rappelons que l'analyse multi échelle et le comptage de puissance nous renseignent que le degré de divergence de Σ vaut 2). Aussi, en utilisant les conditions de **renormalisations**

$$\left. \frac{\partial \Sigma_{\vec{a}}}{\partial |\mathbf{a}|^2} \right|_{\vec{a}=0} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_0^r = 0, \quad (14)$$

un calcul rigoureux nous conduit à l'obtention de l'équation fermée en fonction des termes renormalisés.

Equation fermée de $\Sigma_{\vec{a}}^r$

18

Proposition

L'équation fermée de la self energy est de la forme:

$$\begin{aligned} \Sigma_{a0}^r = & -Z^2 \lambda \sum_{p_{\perp}} \left(a^2 \frac{\delta(\sum \vec{p}_{\perp})}{(\vec{p}_{\perp}^2 + m_r^2 - \Sigma_{0\vec{p}_{\perp}}^r)^2} \right. \\ & - \frac{a^2}{2} \frac{\delta(\sum \vec{p}_{\perp})}{(\Sigma p_{\perp})^2 (\vec{p}_{\perp}^2 + m_r^2 - \Sigma_{0\vec{p}_{\perp}}^r)} \\ & \left. + \frac{\delta(a + \sum \vec{p}_{\perp})}{a^2 + \vec{p}_{\perp}^2 + m_r^2 - \Sigma_{a\vec{p}_{\perp}}^r} - \frac{\delta(\sum \vec{p}_{\perp})}{\vec{p}_{\perp}^2 + m_r^2 - \Sigma_{0\vec{p}_{\perp}}^r} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Solution de l'équation

19

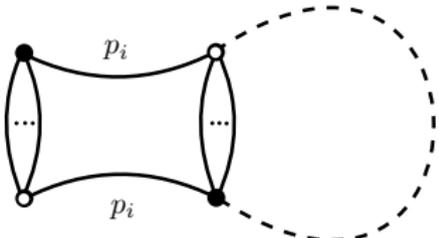
Malgré l'existence de solution, il est très difficile de résoudre cette équation sauf dans l'Ultra Violet et à grande dimension. Nous allons passer au calcul perturbatif boucle à boucle pour y remédier.

Calcul à une boucle

20

Nous allons imposer un **cut-off UV** noté Λ pour contrôler les divergences. Soit $\sigma_i^1 / \Sigma = \sum_i \sigma_i^1$.

A une boucle on a :



$$\sigma_i^1 = \text{diagram} \quad \ell = -2\lambda \sum_{q_{\perp i}}^{\Lambda} \frac{\delta(p_i + \sum \vec{q}_{\perp i})}{p_i^2 + \vec{q}_{\perp i}^2 + m^2}. \quad (16)$$

Nous allons utiliser la forme intégrale de la **fonction Delta** ainsi que la formule de **Schwinger** de $A = \frac{1}{p_i^2 + q_{\perp i}^2 + m^2}$:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\beta e^{i\beta(p_i + \Sigma q_{\perp i})} \quad A = \int_{\frac{1}{\Lambda^2}}^{+\infty} d\alpha e^{-\alpha(p_i^2 + q_{\perp i}^2 + m^2)}. \quad (17)$$

Résultat

21

Proposition

Le calcul à une boucle de le self energy est donné par:

$$\sum_{i=1}^6 \sigma_i^1 = -\frac{12\pi^2\lambda}{\sqrt{5}}\Lambda^2 + \frac{24\pi^2\lambda}{\sqrt{5}}m^2 \ln \Lambda + \frac{24\pi^2\lambda}{5\sqrt{5}} \ln \Lambda \vec{p}^2 \quad (18)$$

Le terme $-\frac{12\pi^2\lambda}{\sqrt{5}}\Lambda^2$ est dominant dans la divergence UV avec pour degré 2. Par contre les deux derniers termes contribuent aux sous graphes divergents de la self energy et ont des degrés de divergences inférieures à 2.

Calcul à 2 boucles

22

Le calcul à 2 boucle se subdivise en deux parties. La première est constituée de diagramme de même **couleurs** sur les lignes et l'autre de **couleurs** différentes. Commençons d'abord par le premier cas constitué de ligne de même **couleur**.

$$\sigma_i^{21} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} = 4\lambda^2 \sum_{\vec{p}_\perp} \frac{\delta(p_i + \sum \vec{p}_\perp)}{p_i^2 + \vec{p}_\perp^2 + m^2} \sum_{\vec{q}_\perp} \frac{\delta(p_i + \sum \vec{q}_\perp)}{(p_i^2 + \vec{q}_\perp^2 + m^2)^2}. \quad (19)$$

Resultat

23

Proposition

Le résultat du calcul à 2 boucles pour des melons de lignes de même couleurs est:

$$\sum_{i=1}^6 \sigma_i^{21} = \frac{48\lambda^2\pi^4 \ln \Lambda}{5} \Lambda^2 - \frac{576\lambda^2\pi^4 m^2 (\ln \Lambda)^2}{5} - \frac{2\lambda^2\pi^4 (\ln \Lambda)^2 \vec{p}^2}{25} \quad (20)$$

Le premier terme en Λ^2 est le terme dominant dans la divergence UV tandis que les deux derniers termes contribuent aux sous graphes divergents.

Ligne de couleurs différente

24

Le second cas concerne les lignes de couleurs différentes. On a :

$$\sigma_i^{22} = 4\lambda^2 \sum_{p_i} \left[\sum_{\vec{p}_\perp} \frac{\delta(p_i + \sum \vec{p}_\perp)}{p_i^2 + \vec{p}_\perp^2 + m^2} \sum_{\vec{q}_{\perp\perp}} \frac{\delta(q_j + p_i + \sum \vec{q}_{\perp\perp})}{(q_j^2 + p_i^2 + \vec{q}_{\perp\perp}^2 + m^2)^2} \right] \quad (21)$$

Proposition

Le résultat du calcul à 2 boucles pour des melons de ligne de couleurs différentes est:

$$\sum_{j=1}^6 \tau_j^{22} = 6\lambda^2 \pi^4 (\Lambda^2 - 2m^2 \ln \Lambda) \ln \Lambda. \quad (22)$$

Le premier terme en Λ^2 est le terme dominant dans la divergence UV.

Conclusion et perspectives

26

Pour cette présentation, nous avons:

- établi l'équation fermée des fonctions de corrélation pour un modèle de **TGFT** avec **invariance de jauge**;
- calculé dans la **théorie des perturbations** les fonctions de corrélation à **une** et à **deux boucles**.

Nous espérons dans la suite calculer les fonctions de corrélation à **n'importe quelle boucle** en utilisant une **relation de récurrence** déduite des calculs antérieurs.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION