Etats cohérents SUSY et quantifications canoniques avancées

SABI TAKOU Daniel

Ecole" Méthodes Mathématiques de la théorie Quantique"(MEMAQUAN)
Du 11 au 15 Juillet 2022 Lieu : Campus de DANGBO, Bénin

Motivations

- Principe de correspondance de Niels Borh, 1913.
- Découverte des fonctions d'ondes qui affichaient les mouvements classiques : Schrödinger, 1926 : les états cohérents(CS).
- Klauder, Glauber, et Sudarshan début 1960 redécouverte puis généralisation des CS : $\hat{a}|z >= z|z >$
- Utilisation des CS :En optique (les interactions entre matière et radiation cohérente), en physique nucléaire, en physique de la matière condensée, en théorie quantique des champs, en informatique quantique (Intrications ou mesures quantiques) etc$\cdots$.

Motivations/Objet

- Centre International de Rencontres Mathématiques(CIRM) 2016 : Coherent States and Their Applications : A Contemporary Panorama :Jean-Pierre Antoine, Fabio Bagarello et Jean-Pierre Gazeau.

- Construire des états cohérents qui pourraient être utilisées dans des modèles de gravité quantique, et en particulier dans le contexte de singularités cosmologiques.

- Construction des états cohérents canoniques (CCS) selon Gazeau-Klauder et les Etats cohérents Hamiltoniens (HCS [a]).

- Les CCS ont été construits pour être les états quantiques reproduisant le mouvement classique de l'oscillateur harmonique.

---

a. D. J. Fernández, V. Hussin and O. Rosas-Ortiz, J. Phys. A : Math. Theor. 40, 6491 (2007)

Motivations/Objet

- Les propriétés des CCS :

1-Minimisation de la relation d'incertitude d'Heisenberg : $\triangle Q \triangle P = \frac{1}{2}\hbar$ pour tout $|z>$

2-Dans le cas de l'oscillateur harmonique et pour les états $|z> \equiv |p,q>$, l'action quantique restreinte nous livre des équations du mouvement qui correspondent aux équations classiques :$\dot{q} = \frac{p}{m}$ et $\dot{p} = -m\omega^2 q$.

3-Stabilité temporelle : $e^{\frac{-itH}{\hbar}}|p_0, q_0> = |p(t), q(t)>$

NB : Ce n'est généralement pas le cas pour des Hamiltoniens qui possèdent un potentiel non quadratique en Q [a]

- Il est alors apparu qu'une façon de palier à ce problème serait peut-être de lier les états canoniques à l'Hamiltonien, d'où l'Introduction de la mécanique quantique supersymétrique (SUSY)$\Longrightarrow$ HCS $(A|\alpha> = \alpha|\alpha>)$

---

a. Jean-Pierre Gazeau. Coherent States in Quantum Physics. Berlin, 2009.

Les formulations de l'action(Gazeau-Klauder)

- Action classique

$$A_C = \int_0^T dt\,[p(t)\dot{q}(t) - H_c(p(t), q(t))] \tag{1}$$

ou

$$A_C = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}(p\dot{q} - q\dot{p}) - H_c(p(t), q(t))\right]. \tag{2}$$

- Variation :$\delta A_C = 0$ conduit à :

$$\dot{q} = \frac{\partial H_c}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_c}{\partial q}. \tag{3}$$

- Solution :$p(t), q(t); \quad (p(0), q(0)) \in \mathbb{R}^2$.

Les formulations de l'action

♣ Action quantique

$$A_Q = \int_0^T \langle\psi(t)|[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}(P,Q)]|\psi(t)\rangle dt. \quad (4)$$

♣ Variation :$\delta A_Q = 0$ conduit à

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle. \quad (5)$$

♣ Solution : $|\psi(t)\rangle; \quad |\psi(0)\rangle \in H.$

Les Etats Cohérents Canoniques et Hamiltoniens

- Etats cohérents canoniques selon Klauder :

$$|p(t), q(t)\rangle = e^{-iqP/\hbar} e^{ipQ/\hbar} \mid \eta\rangle; \quad |\eta\rangle \equiv |0\rangle. \tag{6}$$

- Etats cohérents Hamiltoniens :

$$|p(t), q(t)\rangle = N(q) e^{i\beta(p,q)} e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left(W(q)+i\frac{p}{\sqrt{2m}}\right)Q} |\Omega_0\rangle. \tag{7}$$

où

$$W(q) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(q)}{\psi_0(q)}. \tag{8}$$

Les Etats Cohérents Canoniques et Hamiltoniens

♣ Nouvelle action

$$A_{Q(R)} = \int_0^T [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))]\, dt \equiv A_C. \tag{9}$$

où $$H(p(t), q(t)) = H_c(p, q) + \mathcal{O}(\hbar; p, q). \tag{10}$$

♣ Métrique de Fubini-Study induite par ces états cohérents

$$d\sigma^2(p, q) \equiv (2\hbar)[||d|p, q\rangle||^2 - |\langle p, q|d|p, q\rangle|^2]. \tag{11}$$

Les propriétés des états cohérents Hamiltoniens

- La minimisation de la relation d'incertitude généralisée

$$(\triangle\mathcal{W}(Q))^2(\triangle P)^2 = \frac{1}{4}|\langle\alpha|[\mathcal{W}(Q), P]|\alpha\rangle|^2. \tag{12}$$

$$\text{où} \quad \langle\mathcal{W}(Q)\rangle = \frac{1}{2}\langle(A + A^\dagger)\rangle \ \text{ et } \ \langle P\rangle = (-i)\sqrt{\frac{m}{2}}\langle(A - A^\dagger)\rangle. \tag{13}$$

- l'égalité, dans la limite classique, entre la valeur moyenne de l'opérateur Hamiltonien et l'Hamiltonien classique

$$\langle\alpha|H|\alpha\rangle = \langle\alpha|A^\dagger A|\alpha\rangle = H_c(p, q) + \mathcal{O}(\hbar). \tag{14}$$

Les propriétés des états cohérents Hamiltoniens

♣ La formule spécifique des équations du mouvement

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial q}\right)^{-1}\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial p} = \left(\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial q}\right)^{-1}\frac{p}{m} = \frac{p}{m} + \mathcal{O}(\hbar). \quad (15)$$

et

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial q}\right)^{-1}\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial q} = -\left(\frac{\partial\langle Q\rangle}{\partial q}\right)^{-1}\frac{\partial W^2(q)}{\partial q} = \frac{\partial V(q)}{\partial q} + \mathcal{O}(\hbar). \quad (16)$$

♣ La stabilité au premier ordre en t.

$$|p(t), q(t)\rangle = e^{\frac{-itH}{\hbar}}|p_0, q_0\rangle \Leftrightarrow Re\left(\langle p_0, q_0|e^{\frac{itH}{\hbar}}|p(t), q(t)\rangle\right) = 1. \quad (17)$$

Système de Schrödinger-Pauli

Hamiltonien du modèle

Équation de Schrödinger pour une particule chargée non-relativiste plongée dans un champ magnétique

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \mu\sigma \cdot \mathbf{B}, \quad A = (0, Bx, 0). \tag{18}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right] - \frac{ie\hbar}{m} Bx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 B^2}{2m} x^2 + \mu\sigma_z B. \tag{19}$$

Modèle de Pauli

♣ L'équation stationnaire de Schrödinger s'écrit comme suit

$$\mathcal{H}_\pm \phi_\pm(\mathbf{x}) = E_\pm \phi_\pm(\mathbf{x}), \tag{20}$$

où

$$\mathcal{H}_\pm = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right] - \frac{ie\hbar}{m} Bx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 B^2}{2m} x^2 \pm \mu B. \tag{21}$$

♣ La fonction d'onde : $\phi_\pm(x, y, z) = e^{\left[\frac{i}{\hbar}(yp_y + zp_z)\right]} \psi_\pm(x)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''_\pm(x) + \left[\frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_c^2 (x + \frac{p_y}{eB})^2 - E_\pm\right]\psi_\pm(x) = 0, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}. \tag{22}$$

Modèle de Pauli

Fonction d'onde et son énergie

$$\psi_{n\pm}(u) = \left(\frac{m\omega_c}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}u^2} H_n\left[\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}u\right], n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$u = x - a_0, \quad E_{n\pm} = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + \frac{p_z^2}{2m} \pm \mu B. \tag{23}$$

Superpotentiel

$$W_n(u) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi'_{n\pm}(u)}{\psi_{n\pm}(u)} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\left[\frac{m\omega_c}{\hbar}u - \frac{\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}H_{n+1}(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}u)}{H_n(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}u)}\right]. \tag{24}$$

Action quantique restreinte

♣ A l'état fondamental

$$W_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_c(x - a_0). \tag{25}$$

♣ Les états cohérents Hamiltoniens

$$|p(t), x(t)\rangle = e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}(x-a_0)^2} e^{-i\frac{p}{2\hbar}(x-a_0)} e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\omega_c(x-a_0)+i\frac{p}{\sqrt{2m}}\right)X}|\Omega\rangle \tag{26}$$

Action quantique restreinte

♣ Nouvelle action quantique

$$\begin{aligned} A_Q(R) &= \int_0^T dt \left[\left\{ \frac{1}{2}\{p\dot{x} - (x - a_0)\dot{p}\} - H_c(p,x) \right\} - \frac{\hbar\omega_c}{2} \right] \\ &= A_C + \mathcal{O}(\hbar). \end{aligned} \tag{27}$$

Métrique de Fubini-Study induite par les états cohérents Hamiltoniens, qui est une métrique naturelle de la sphère de Bloch

$$\begin{aligned} d\sigma^2(p,x) &= \frac{2}{\hbar}(\Delta X)^2 \left[2m \left(\frac{\partial W_0(x)}{\partial x} \right)^2 dx^2 + dp^2 \right] \\ &= m\omega_c dx^2 + (m\omega_c)^{-1} dp^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Conclusion

- Coexistence des théories classique et quantique à travers les états cohérents.
- L'action quantique restreinte aux états cohérents a permis de faire ressortir cette coexistence.
- Possibilité de construire des états cohérents tels que leur évolution temporelle soit toujours un état cohérent.
- Les propriétés des états cohérents dans le cas général comme la résolution de l'identité et relation d'incertitude ont été possible.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION ! ! !