Identités de Ward-Takahashi en théorie des champs à interations tensorielles

KPERA Bio Wahabou

Chaire Internationale de Physique Mathéthématique et Applications
(CIPMA-UAC)

Ecole : Méthodes Mathématiques pour la Théorie Quantique
(MeMaQuan-IMSP, 11-15 Juillet 2022)

July 15, 2022

Motivation

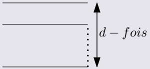
- Théorème de E. Noether (1918): lorsqu'un système est invariant sous une certaine transformation, il y a un courant conservé.[a]
- Entre (1950) et (1957), J. C. Ward et Y. Takahashi ont trouvé la version quantique de ce théorème: identités de Ward-Takahashi [b]
- Les identités de Ward-Takahashi sont des relations entre les fonctions de corrélation qui découlent des symétries globales de l'action d'une théorie donnée

[a] Emmy Noether, Maths-Phys Klasse, vol.1918, no 2, 1918
[b] John Clive Ward, Yasushi Takahashi, Phys. Rev

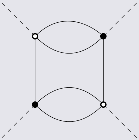
Motivation

- L'action S caractérisant un tel modèle de tenseurs est supportée par la $1/N$, $(N \in \mathbb{N})$ expansion dans laquelle les diagrammes limites sont des mélons

$S \; =$



$+ \lambda$



$+ O(\lambda^2) \qquad (1)$

- Récemment les identités de Ward-Takahashi ont été utilisées comme des contraintes fortes en théorie des champs à interaction tensorielle en particulier dans l'étude du FRG [a]

[a] [(2019)-(2021), Vincent Lahoche et *al*, PhysRevD, vol 100]

Objectif

Calculer les identités de Ward-Takahashi en TQC à interaction tensorielle aux premier et deuxième ordres pour les transformations unitaires

Plan

1. Préliminaires
2. Symétrie et identité de Ward pour les TGFT
3. Identité de Ward-Takahashi
4. Conclusion, remarques et perspectives

Préliminaires

- Soit G un groupe compact

$$\begin{aligned} \phi : \quad G^{\otimes d} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (g_1, g_2, \dots g_d) &\longmapsto \phi(g_1, g_2, \dots g_d) \end{aligned} \tag{2}$$

Définition: Fonction de partition

Pour une théorie avec $n-$champs ordinaires, $n \in \mathbb{N}^*$

$$Z = \int \prod_{i=1}^{n} d\phi_i \, e^{-S(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)} \tag{3}$$

Préliminaires

Définition: Fonction de corrélation

La fonction de corrélation à $n-$points ,

$$G^n(x_1, x_2, \dots, x_n) := \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\rangle \tag{4}$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\int d\phi \prod_{k=1}^{n} \phi(x_k) e^{-S(\phi)}, \tag{5}$$

Symétries de l'action

Considérons une théorie décrite par le Lagrangien du champ scalaire

- $S(\phi)$ est invariante sous les transformations infinitésimales

$$\delta\phi = i\epsilon^{\mu} B_{\mu}(x) \tag{6}$$

B_{μ} : une famille de fonctions locales et polynomiales

ϵ^{μ} : le paramètre infinitésimal caractérisant la transformation

- La transformation en question appartient à un groupe de symétrie

Constante de structure

En désignant par X_μ les éléments de l'algèbre associée au groupe

$$[X_\mu, X_\nu] = if^{\rho}_{\mu\nu} X_\rho \tag{7}$$

$f^{\rho}_{\mu\nu}$: constante de structure, obeissant à l'identité de Jacobi

$$[X_\mu,[X_\nu,X_\lambda]]+[X_\lambda,[X_\mu,X_\nu]]+[X_\nu,[X_\lambda,X_\mu]]=0$$
$$\Rightarrow \sum_{\mu,\nu,\lambda} f^{\rho}_{\mu\nu} f^{\gamma}_{\rho\lambda} = 0 \tag{8}$$

- $B_\mu(x)$ satisfait

$$\int \left(B_\mu(y)\frac{\delta B_\nu(x)}{\delta\phi(y)} - B_\nu(y)\frac{\delta B_\mu(x)}{\delta\phi(y)} \right) dy = if^{\rho}_{\mu\nu} B_\rho(x) \tag{9}$$

Opérateur de Ward

- La variation infinitésimale d'une fonctionnelle $F(\phi)$

$$\delta F = -i\epsilon^{\mu}\mathcal{W}_{\mu}F, \quad \mathcal{W}_{\mu} := -\int dx B_{\mu}\frac{\delta}{\delta\phi} \tag{10}$$

$\mathcal{W}$: opérateur de Ward et vérifie la relation de commutation

$$[\mathcal{W}_{\mu}, \mathcal{W}_{\nu}] = if^{\rho}_{\mu\nu}\mathcal{W}_{\rho} \tag{11}$$

- $B_{\mu}(x)$ est une fonction linéaire du champ ϕ i.e qu'il existe T_{μ}

$$B_{\mu}(x) = T_{\mu}\phi(x) \tag{12}$$

Remarque: T aussi vérifie l'algèbre de commutation (7)

Identité de Ward

▶ La variation de l'action $S(\phi)$ sous la transformation de symétrie s'exprime grâce à l'identité

$$\mathcal{W}_\mu S := -\int dx\, T_\mu \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \tag{13}$$

Cette identité porte le nom d'identité de Ward

Remarque: l'action classique S correspond dans l'UV à la fonction génératrice Γ des fonctions de vertex ou encore des $1PI$. Donc

$$\mathcal{W}_\mu \Gamma := -\int dx\, T_\mu \phi \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} = 0 \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \langle T\phi(x_1)\cdots\phi(x_{n-1})\, T\phi(x_n)\phi(x_{n+1})\cdots\phi(x_N)\rangle_{1PI} = 0 \tag{15}$$

Introduction à la TGFT

- $G{=}U(1)$

$$g_j \in U(1) \Longrightarrow g_j = e^{i\theta_j} \quad , \quad \theta_j \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad j \in \mathbb{N}^*. \tag{16}$$

- La transformation de Fourier des $d-$copies du champ tensoriel

$$\phi(\vec{g}) = \sum_{\vec{p}\in\mathbb{Z}^d} \phi_{\vec{p}} \exp[i(\vec{p}, \vec{\theta})] \tag{17}$$

- La symétrie globale de l'action s'écrit

$$\boxed{U^{\otimes d} := U^{(1)} \otimes U^{(2)} \otimes \cdots \otimes U^{(d)}} \tag{18}$$

- La transformation touchant le $a^{ième}$ indice du tenseur

$$U^{(a)}\phi_{\vec{p}} = \sum_{k_a\in\mathbb{Z}} U^{(a)}_{p_a k_a} \phi_{p_1\ldots k_a\ldots p_d}, \tag{19}$$

avec $a = 1, 2, \ldots, d$

Principe variationnel de S, Z

Considérons l'analogue tensorielle de l'action S (1) dans $\mathbb{C}$

$$S[\phi,\bar{\phi}] = \sum_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}} C(\vec{p}) \bar{\phi}_{\vec{p}} + \lambda \sum_{\vec{q},\vec{r},\vec{s},\vec{t}} \phi_{\vec{q}} \bar{\phi}_{\vec{r}} \phi_{\vec{s}} \bar{\phi}_{\vec{t}} \tag{20}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, la source F correspondante

$$F = \sum_{\vec{p}} \bar{J}_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}} + \sum_{\vec{p}} J_{\vec{p}} \bar{\phi}_{\vec{p}} \tag{21}$$

- La variation de la fonction de partition

$$\delta Z[\bar{J}, J] = \int d\phi d\bar{\phi} \Big(-\delta S + \delta F \Big) e^{-S+F} \tag{22}$$

$\mathcal{W}$ à l'ordre 1

On développement en série de Taylor $U^{(a)} = e^{iB^{(a)}}$ à l'ordre 1 en B

$$U^{\otimes d} = 1 + iB^{(1)} + iB^{(2)} \cdots + iB^{(d)} \tag{23}$$

Théorème 1:

Soit S l'action invariante sous $U^{\otimes d}$ avec $U^{(a)} = e^{iB^{(a)}}$. La variation globale de S et F sous $U^{\otimes d}$ sont

$$\delta^{\otimes} S = \sum_{a=1}^{d} \delta^{(a)} S_{kin} \quad ; \quad \delta^{\otimes} F = \sum_{a=1}^{d} \delta^{(a)} F, \tag{24}$$

où $\delta^{(a)} S = S - U^{(a)} S$ et $\delta^{(a)} F = F - U^{(a)} F$

$\mathcal{W}$ à l'ordre 1

- En particulier pour $a = 1$ et puis en posant $\delta^{(1)} Z = 0$

$$\mathcal{W}_1 \Rightarrow \sum_{\vec{p}_{\perp_1}, \vec{p}'_{\perp_1}} \delta_{\mathbf{p}_{\perp_1} \mathbf{p}'_{\perp_1}} \left\{ \phi_{\vec{p}} \left[C(\vec{p}) - C(\vec{p}\,') \right] \bar{\phi}_{\vec{p}\,'} + \bar{J}_{\vec{p}\,'} \, \phi_{\vec{p}} - J_{\vec{p}} \, \bar{\phi}_{\vec{p}\,'} \right\} = 0.$$

C'est l'identité de Ward-Takahashi $(\mathcal{W}_1)$ en $B^{(1)}$, où

$\vec{p}\,' = (q_1, p_2, \ldots, p_d)$ et $\delta_{\mathbf{p}_{\perp_1} \mathbf{p}'_{\perp_1}} = \prod_{i=2}^{d} \delta_{p_i p'_i}$.

$\mathcal{W}$ à l'ordre 2

On développement en série de Taylor $U^{(a)} = e^{iB^{(a)}}$ à l'ordre 2 en B^2

$$U^{\otimes d} := \sum_{a,b=1;a\neq b}^{d} \Big(-\frac{1}{2}\sum B^{(a)}B^{(a)} - B^{(a)}B^{(b)} - \frac{1}{2}\sum B^{(b)}B^{(b)} \Big) \quad (25)$$

Théorème 2:

Soit S l'action invariante sous $U^{\otimes d}$ avec $U^{(a)} = e^{iB^{(a)}}$. La variation globale de S et F sous $U^{\otimes d}$ au deuxième ordre sont telles que:

$$\delta^{\otimes} S = \sum_{a,b=1;a\neq b}^{d} \delta^{(a,b)} S_{kin} \; ; \; \delta^{\otimes} F = \sum_{a,b=1;a\neq b}^{d} \delta^{(a,b)} F \quad (26)$$

$\delta^{(a,b)} S = U^{(a)}U^{(b)}S - S$ et $\delta^{(a,b)} F = U^{(a)}U^{(b)}F - F$

$\mathcal{W}_{1,1}$

En particulier pour $a = 1$ et $b = 2$ puis en posant $\delta Z_{1,1} = 0$

$$\mathcal{W}_{1,1} \Rightarrow$$

$$\sum_{\vec{p}_{\perp_1}, \vec{p}'_{\perp_1}, \vec{q}_{\perp_1}} \delta_{\mathbf{p}_{\perp_1}\mathbf{q}_{\perp_1}} \delta_{\mathbf{p}_{\perp_1}\mathbf{p}'_{\perp_1}} \Big\{ \frac{1}{2}\phi_{\vec{q}}\, C(\vec{q})\, \bar{\phi}_{\vec{p}'} + \frac{1}{2}\phi_{\vec{q}}\, C(\vec{p}')\bar{\phi}_{\vec{p}'} - \phi_{\vec{q}}\, C(\vec{p})\bar{\phi}_{\vec{p}'}$$
$$- \frac{1}{2}\bar{J}_{\vec{p}'}\phi_{\vec{q}} - \frac{1}{2}J_{\vec{q}}\,\bar{\phi}_{\vec{p}'} \Big\} = 0 \tag{27}$$

$\mathcal{W}_{1,1}$ est l'identité de Ward-Takahashi au deuxième ordre en $B^{(1,1)}$, $\vec{p}' = (r_1, p_2, p_3, \cdots, p_d)$, $\vec{q} = (q_1, p_2, p_3, \cdots, p_d)$ et $\vec{p}_{\perp_1} = \mathbf{p}_{\perp_1}$

$\mathcal{W}_{1,2}$

$\delta Z_{1,2} = 0$

$\mathcal{W}_{1,2} \Longrightarrow$

$$\sum_{\vec{p}_{\perp\perp},\vec{p}\,'_{\perp\perp}} \delta_{\mathbf{p}_{\perp\perp}\mathbf{p}\,'_{\perp\perp}} \Bigg\{ \Big(\phi_{\vec{p}}\, C(\vec{p})\bar{\phi}_{\vec{p}\,'} + \phi_{\vec{p}}\, C(\vec{p}\,')\bar{\phi}_{\vec{p}\,'} \Big) - \sum_{\vec{q}\,'_{\perp_2}} \delta_{q\,'_1 p\,'_2} \phi_{\vec{p}}\, C(\vec{q}\,')\bar{\phi}_{\vec{p}\,'}$$
$$- \sum_{\vec{q}_{\perp_1}} \delta_{q_1 p\,'_1} \phi_{\vec{p}}\, C(\vec{q}\,)\bar{\phi}_{\vec{p}\,'} - \Big(\bar{J}_{\vec{p}\,'}\, \phi_{\vec{p}} + J_{\vec{p}}\, \bar{\phi}_{\vec{p}\,'} \Big) \Bigg\} = 0 \tag{28}$$

$\mathcal{W}_{1,2}$ est l'identité de Ward-Takahashi au deuxième ordre en $B^{(1,2)}$,
$\vec{p}\,' = (r_1, r_2, p_3, \cdots, p_d)$, $\vec{q}\,' = (r_1, p_2, p_3, \cdots, p_d)$,
$\vec{p}\,' = (p_1, r_2, p_3, \cdots, p_d)$ et $\vec{p}_{\perp\perp} = \mathbf{p}_{\perp_1\perp_2} = \mathbf{p}_{\perp\perp}$

$\mathcal{W}_{2,2}$

$\delta Z_{2,2} = 0$

$\mathcal{W}_{2,2} \Longrightarrow$

$$\sum_{\vec{p}_{\perp_2},\vec{p}'_{\perp_2},\vec{q}_{\perp_2}} \delta_{\mathbf{p}_{\perp_2}\mathbf{q}_{\perp_2}}\delta_{\mathbf{p}_{\perp_2}\mathbf{p}'_{\perp_2}}\Big\{\frac{1}{2}\phi_{\vec{q}}\,C(\vec{q}\,)\bar{\phi}_{\vec{p}'} + \frac{1}{2}\phi_{\vec{q}}\,C(\vec{q}\,)\bar{\phi}_{\vec{p}'} - \phi_{\vec{q}}\,C(\vec{p}\,)\bar{\phi}_{\vec{p}'}$$
$$-\frac{1}{2}\bar{J}_{\vec{p}'}\,\phi_{\vec{q}} - \frac{1}{2}J_{\vec{q}}\,\bar{\phi}_{\vec{p}'}\Big\} = 0 \qquad (29)$$

$\mathcal{W}_{2,2}$ est l'identité de Ward-Takahashi au deuxième ordre en $B^{(2,2)}$, $\vec{p}\,' = (p_1, r_2, p_3, \cdots, p_d)$ et $\vec{q} = (p_1, q_2, p_3, \cdots, p_d)$

Remarques et perspectives

Dans ce travail nous avons utilisé les symétries de Ward pour déterminer :

1. les identités de Ward-Takahashi au premier ordre.
2. les identités de Ward-Takahashi au deuxième ordre.

On s'attendait à ce que les identités de Ward-Takahashi $\mathcal{W}_{1,1}$, $\mathcal{W}_{1,2}$ et $\mathcal{W}_{2,2}$ proviennent de $\mathcal{W}_1$ et de $\mathcal{W}_2$ tel n'est pas le cas.

Comme perspective nous voulons déterminer toutes les contraintes découlant des identités de Ward-Takahashi.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION