Théorie classique des champs sur un espace à dérivées fractionnaires

Jean-Paul ANAGONOU

Chaire Internationale en Physique Mathématique et Applications
(Chaire UNESCO-CIPMA)

Ecole sur les Méthodes Mathématiques de la Théorie Quantique
(MEMAQUAN - IMSP, 11 - 15 Juillet 2022)

Université d'Abomey-Calavi

July 14, 2022

Motivations et bref historique

- La question des dérivées d'ordre non-entier est évoquée dès 1695 par Gottfried W. Leibniz dans une lettre à G. de L'Hospital. Mais lorsque celui-ci lui demande à quelle fin pourrait être utile la dérivée d'ordre un demi de la fonction $f(x)$, Leibniz répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences.

- De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc $\cdots$.

Motivations et bref historique

- Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers telles que la formule de Grünwald-Letnikov, la formule de Riemann-Liouville et la formule de Caputo.

DF généralisée de Udita N. Katugampola

- De cette famille de dérivées fractionnaires, on a :

$$\left({}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a+;\eta,\kappa}f\right)(x) = \frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}}f(\tau)\,d\tau, \qquad (1)$$

avec $(0 \leq a < x < b \leq \infty)$, qui généralise six DF existantes: Riemann-Liouville, Hhadamard, Erdélyi-Kober, Katugampola, Weyl et Liouville.

- Plusieurs autres motivations en théorie quantique des champs permettant de palier au fameux problème de la renormalisation existent aussi.

But de l'exposé

- Présenter les conséquences de la généralisation du calcul différentiel (celles des dérivées fractionnaires) dans l'étude de certaines quantités physiques tels que les courants de Noether en théorie classique des champs.

Plan

1. Dérivée fractionnaire de Khalil et al.
2. Courant de Noether sur l'EDF de Khalil et al.
3. Remarques, conclusion et perspectives

Dérivée fractionnaire de Khalil et al. 6

Définitions: [Khalil et al. (2014)]

• Soit une fonction $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f est définie par:

$$\partial_t^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{f(t + \epsilon\, t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}, \quad \alpha \in]0; 1] \quad \text{et} \quad t > 0. \tag{2}$$

• Soient $\alpha \in]n; n+1]$ et f une fonction n-différentiable en t , où $t > 0$. La dérivée fractionnaire de f à l'ordre α est définie par:

$$\partial_t^\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t + \epsilon\, t^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha-1])}(t)}{\epsilon}, \tag{3}$$

où $[\alpha]$ est le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Propriétés de la DF de Khalil

Soient $\alpha \in]0, 1]$, f et g des fonctions α-différentiables à un point $t > 0$. L'opérateur ∂^α a les propriétés dont voici quelques unes:

- $$\partial_t^\alpha[a\, f(t) + b\, g(t)] = a\, \partial_t^\alpha f(t) + b\, \partial_t^\alpha g(t), \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{4}$$
- $$\partial_t^\alpha \gamma = 0, \text{ pour toute fonction constante } f(t) = \gamma, \tag{5}$$
- $$\partial_t^\alpha[f(t) \times g(t)] = f(t)\, \partial_t^\alpha g(t) + g(t) \partial_t^\alpha f(t) \tag{6}$$
- $$\partial_t^\alpha \left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{g(t)\partial_t^\alpha f(t) - f(t)\partial_t^\alpha g(t)}{[g(t)]^2} \tag{7}$$
- $$\partial_t^\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \partial_t f(t). \tag{8}$$

Le commutateur

Soient $\alpha \in]0;1]$ et $\beta \in]0;1]$ tel que $(\alpha+\beta) \in]0;1]$. On évalue

$$[\partial^{\alpha};\partial^{\beta}] = (\alpha-\beta)\partial^{\alpha+\beta}. \tag{9}$$

On déduit que l'opérateur ∂^{α} ne commute pas.

Crochet antisymétrique

En utilisant (9), on obtient:

$$[\partial^{\alpha};\partial^{\beta}] = -[\partial^{\beta};\partial^{\alpha}]. \tag{10}$$

On déduit que $[\partial^{\alpha};\partial^{\beta}]$ est antisymétrique.

Identité de Jacobi

Soient $a \in]0;1]$, $b \in]0;1]$ et $c \in]0;1]$ tel que $(a+b+c) \in]0;1]$.
On a

$$\left[\partial^a;[\partial^b;\partial^c]\right] + \left[\partial^b;[\partial^c;\partial^a]\right] + \left[\partial^c;[\partial^a;\partial^b]\right] = 0. \qquad (11)$$

On déduit donc que l'opérateur ∂^α vérifie l'identité de Jacobi.

Type d'algèbre

On déduit donc que l'espace sur lequel est défini l'opérateur ∂^α est un algèbre de Poisson.

Intégrale I^α réciproque à ∂^α en Mécanique Classique

$I^\alpha[\partial^\alpha] = I_d$, alors nous construisons l'intégrale fractionnaire:

$$I^\alpha[f(t)] = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}}\, dx \qquad \text{avec } f(a) = 0 \quad \text{et} \quad a > 0. \tag{12}$$

Action classique en mécanique classique

En utilisant (12), nous définissons l'action classique S^d par

$$S^d = \int dt\, \frac{\mathcal{L}^d[x\,;\partial_t^\alpha x]}{t^{1-\alpha}}. \tag{13}$$

Equation d'Eleur-Lagrange

En utilisant (13) et en appliquant le principe de moindres actions:

$$\partial_x^\alpha \mathcal{L}^d - \partial_t^\alpha \left(\partial^\alpha_{[\partial_t^\alpha x]} \mathcal{L}^d \right) = 0. \tag{14}$$

Lagrangien de l'oscillateur harmonique

L'expression du Lagrangien de l'oscillateur harmonique est donnée par

$$\mathcal{L}^d[x;\, \partial_t^\alpha x] = \frac{1}{2} m_\alpha (\partial_t^\alpha x)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2, \tag{15}$$

où m_α est un paramètre de masse.

Equation du mouvement de l'oscillateur harmonique

En utilisant (14) et (15) on obtient l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique

$$(1-\alpha)(2-\alpha)t^{(1-\alpha)(3-\alpha)-1}\dot{x}^{2-\alpha}+ \\ +(2-\alpha)\ddot{x}\dot{x}^{1-\alpha}t^{(1-\alpha)(3-\alpha)}+\widetilde{\omega}^2x^{2-\alpha}=0, \tag{16}$$

avec

$$\widetilde{\omega}^2=\frac{m}{m_\alpha}\omega^2. \tag{17}$$

Solution de l'équation (16)

A l'ordre 1 par la méthode de Bender, nous obtenons la solution

$$x(t) = q_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{1-\alpha}{2\widetilde{\omega}}\Bigg\{\sin(\widetilde{\omega}t)\Bigg[q_0\widetilde{\omega}(-\mathrm{Si}(4\pi)+ + \widetilde{\omega}t - 2\pi) + q_0\widetilde{\omega}\mathrm{Si}(2\widetilde{\omega}t) - v_0(\mathrm{Ci}(2\widetilde{\omega}t) + \log(\frac{\widetilde{\omega}t}{2\pi}))+ + v_0(\mathrm{Ci}(4\pi)+1)\Bigg] + \cos(\widetilde{\omega}t)\Bigg[q_0\widetilde{\omega}(\mathrm{Ci}(2\widetilde{\omega}t) + \log(\frac{2\pi}{\widetilde{\omega}t}))- - x_0\mathrm{Ci}(4\pi)\widetilde{\omega} + v_0(-\mathrm{Si}(4\pi) - \widetilde{\omega}t + 2\pi) + v_0\mathrm{Si}(2t\widetilde{\omega})\Bigg]\Bigg\}.$$

DF de Khalil en théorie classique des champs

Pour $\alpha \in]0;1]$, par analogie à (8), nous définissons :

$$\partial_\mu^\alpha f(x^\mu) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{f(x^\mu + \epsilon (x^\mu)^{1-\alpha}) - f(x^\mu)}{\epsilon} \tag{18}$$

$$= (x^\mu)^{1-\alpha} \partial_\mu f(x^\mu), \tag{19}$$

avec $\mu = 1, 2, 3, 4.$

Nous imposons à cette définition (19) toutes les propriétés de la dérivée fractionnaire de Khalil évoquées plus haut.

Intégrale I^α réciproque à ∂^α en Théorie des Champs

Par analogie à (12), nous définissons

$$I^\alpha[f(x^\mu)] = \int \frac{f(x^\mu)}{(x^\mu)^{1-\alpha}}\, d^4x. \tag{20}$$

.

Action classique en théorie des champs

Par analogie à (13), nous définissons l'action classique en TC

$$S^d = \int \frac{\mathcal{L}^d[\phi; \partial_\mu^\alpha \phi]}{(x^\mu)^{1-\alpha}} d^4x. \tag{21}$$

Théorème de Noether

Lorsqu'une action est invariante sous une certaine transformation, alors il existe un courant qui est conservé. Pour une transformation infinitésimale T_I:

$$T_I : \begin{cases} x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu - \sum_{j=1}^{M} f^\mu_{(j)}\, \beta^{(j)} \\ \phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \sum_{j=1}^{M} C_{(j)}(x)\, \beta^{(j)}, \end{cases} \tag{22}$$

ce courant est de la forme

$$\Theta^\mu_{(j)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} C_{(j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i f^\nu_{(j)} - f^\mu_{(j)} \mathcal{L}, \tag{23}$$

tel que $\partial_\mu \Theta^\mu_{(j)} = 0$

Démarche

- Nous reprenons le calcul de la détermination du courant de Noether en utilisant la dérivée fractionnaire (2). Ainsi,
- nous déterminons la transformée de l'action S^d sous la transformation T_l, à l'aide de laquelle nous déterminons la variation de l'action,
- pour extraire les courants de Noether.
- Interprèter l'expression de la variation de l'action,
- puis retrouver certains courant particulier de Noether.

- La notation $\{\bullet\}_\mu$ stipule simplement que le terme $\bullet$ n'est pas sommé sur μ.

Transformé de l'action classique sous la transformation T_l

L'action transformé S'^d de S^d s'écrit:

$$S'^d = \int \frac{\mathcal{L}^d[\phi'(x'); \partial'^{\alpha}_{\mu}\phi'(x')]}{(x'^{\mu})^{1-\alpha}} d^4x'. \tag{24}$$

En utilisant (22) et (8) nous évaluons:

$$\partial'^{\alpha}_{\mu}\phi'(x') = \left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\partial_{\mu}C_{(j)}\beta^{(j)}\right\}_{\mu} + \left\{(x^{\nu})^{\alpha-1}\partial_{\mu}f^{\nu}_{(j)}\beta^{(j)}\right\}_{\nu}\partial_{\nu}\phi + \\ + \left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\partial_{\mu}\phi\right\}_{\mu}. \tag{25}$$

A l'aide de la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$, nous faisons le changement de variable de dx' en dx:

$$d^4x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)d^4x = \left(1 - \partial_\mu f^{\mu}_{(j)}\beta^{(j)}\right)d^4x. \tag{26}$$

Notations

Nous adoptons les notations suivantes

$$\widetilde{\mathcal{L}^d} := \mathcal{L}^d[\phi;\Psi_\mu] \quad ; \quad \Psi_\mu = \left\{(x^\mu)^{\alpha-1}\partial_\mu\phi\right\}_\mu \quad ; \; \mathcal{L}^d := \mathcal{L}^d[\phi, \partial^\alpha_\mu\phi].$$

Variation de l'action classique: δS^d

$$\delta S^d = \int \frac{d^4x\, \beta^{(j)}}{(x^\mu)^{1-\alpha}} \Bigg(\partial^\alpha_\mu \Bigg\{ \left\{ (x^\nu)^{\alpha-1} f^\nu_{(j)} \right\}_\nu \partial_\nu \phi \left\{ (x^\mu)^{\alpha-1} \partial^\alpha_{\Psi_\mu} \widetilde{\mathcal{L}^d} \right\}_\mu + \\ + C_{(j)} \left\{ (x^\mu)^{2(\alpha-1)} \partial^\alpha_{\Psi_\mu} \widetilde{\mathcal{L}^d} \right\}_\mu - \left\{ (x^\mu)^{\alpha-1} f^\mu_{(j)} \right\}_\mu \widetilde{\mathcal{L}^d} \Bigg\}_\mu + \\ + (\widetilde{\mathcal{L}^d} - \mathcal{L}^d)(\beta^{(j)})^{-1} - \left\{ C_{(j)} \partial^\alpha_\mu \left[(x^\mu)^{2(\alpha-1)} \right\}_\mu \partial^\alpha_{\Psi_\mu} \widetilde{\mathcal{L}^d} \right] - \\ - \left\{ f^\nu_{(j)} \partial^\alpha_\mu \left[(x^\nu x^\mu)^{\alpha-1} \right\}_{\nu\mu} \partial_\nu \phi \partial^\alpha_{\Psi_\mu} \widetilde{\mathcal{L}^d} \right] + C_{(j)} \partial^\alpha_\phi \widetilde{\mathcal{L}^d} + \\ + f^\mu_{(j)} \partial^\alpha_\mu \left[(x^\mu)^{\alpha-1} \widetilde{\mathcal{L}^d} \right] + (1-\alpha) f^\mu_{(j)} (x^\mu)^{-1} \widetilde{\mathcal{L}^d} \Bigg). \tag{27}$$

Résultats

$$\delta S^d = \int \frac{d^4x\, \beta^{(j)}}{(x^\mu)^{1-\alpha}} \left(\partial^\alpha_\mu \mathcal{J}^{d,\mu}_{(j)} + B^d_{(j)}\right). \tag{28}$$

Courant de Noether: $\mathcal{J}^{d,\mu}_{(j)}$

$$\mathcal{J}^{d,\mu}_{(j)} = C_{(j)}\left\{(x^\mu)^{2(\alpha-1)}\partial^\alpha_{\Psi_\mu}\widetilde{\mathcal{L}^d}\right\}_\mu - \left\{(x^\mu)^{\alpha-1} f^\mu_{(j)}\right\}_\mu \widetilde{\mathcal{L}^d} + \\ + \left\{(x^\nu)^{\alpha-1} f^\nu_{(j)}\right\}_\nu \partial_\nu \phi \left\{(x^\mu)^{\alpha-1}\partial^\alpha_{\Psi_\mu}\widetilde{\mathcal{L}^d}\right\}_\mu. \tag{29}$$

NB: A la limite $\alpha = 1$, nous retrouvons l'expression (23)

Terme de brisure $B^d_{(j)}$

$$B^d_{(j)} = C_{(j)}\partial^\alpha_\phi\widetilde{\mathcal{L}^d} - \left\{C_{(j)}\partial^\alpha_\mu\left[(x^\mu)^{2(\alpha-1)}\right\}_\mu\partial^\alpha_{\Psi_\mu}\widetilde{\mathcal{L}^d}\right] - \\ - \left\{f^\nu_{(j)}\partial^\alpha_\mu\left[(x^\nu x^\mu)^{(\alpha-1)}\right\}_{\nu\mu}\partial_\nu\phi\partial^\alpha_{\Psi_\mu}\widetilde{\mathcal{L}^d}\right] + f^\mu_{(j)}\partial^\alpha_\mu\left[(x^\mu)^{\alpha-1}\widetilde{\mathcal{L}^d}\right] + \\ + (1-\alpha)f^\mu_{(j)}(x^\mu)^{-1}\widetilde{\mathcal{L}^d} + (\widetilde{\mathcal{L}^d} - \mathcal{L}^d)(\beta^{(j)})^{-1}. \quad (30)$$

Ce terme s'annule naturellement pour $\alpha = 1$.

L'apparition du terme supplémentaire $B^d_{(j)}$ renseigne que le Lagrangien $\mathcal{L}^d[\phi; \partial^\alpha_\mu\phi]$ n'est pas invariant sous la transformation (22).

Tenseur énergie impulsion

$$\mathcal{T}_{\nu}^{\mu} = \partial_{\nu}^{\alpha}\phi\left\{(x^{\mu})^{2(\alpha-1)}\partial_{\Psi_{\mu}}^{\alpha}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\right\}_{\mu} + \left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}g_{\nu}^{\mu}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\right\}_{\mu} - \\ - \left\{(x^{\nu})^{\alpha-1}\partial_{\nu}\phi\right\}_{\nu}\left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\partial_{\Psi_{\mu}}^{\alpha}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\right\}_{\mu}. \quad (31)$$

Tenseur moment angulaire

$$\mathcal{M}_{\lambda}^{\mu,\delta} = x^{\delta}\Big[\left\{(x^{\nu})^{\alpha-1}\eta_{\lambda}^{\nu}\right\}_{\nu}\partial_{\nu}\phi\left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\partial_{\Psi_{\mu}}^{\alpha}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\right\}_{\mu} - \\ - \partial_{\lambda}^{\alpha}\phi\left\{(x^{\mu})^{2(\alpha-1)}\partial_{\Psi_{\mu}}^{\alpha}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\right\}_{\mu} - \left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\eta_{\lambda}^{\mu}\right\}_{\mu}\widetilde{\mathcal{L}^{d}}\Big]. \quad (32)$$

Application au champ scalaire

Lagrangien du champ scalaire

Considérons le Lagrangien du champ scalaire $\mathcal{L}^d[\phi\,;\partial^\alpha_\mu\phi]$ sur l'espace ordinaire:

$$\mathcal{L}^d[\phi\,;\partial_\mu\phi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \tag{33}$$

Par analogie à (33), on obtient

$$\mathcal{L}^d[\phi\,;\Psi_\mu] := \widetilde{\mathcal{L}^d} = \frac{1}{2}\Psi_\mu^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \tag{34}$$

donc

$$\partial^\alpha_{\Psi_\mu}\widetilde{\mathcal{L}^d} = \Psi_\mu^{2-\alpha}. \tag{35}$$

Application au champ scalaire

Tenseur énergie impulsion pour le champ scalaire

En utilisant (31) et (35), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = &\left\{(x^{\mu})^{\alpha-1} g^{\mu}_{\nu}\left(\frac{1}{2}\Psi^{2}_{\mu} - \frac{1}{2}m^{2}\phi^{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^{4}\right)\right\}_{\mu} - \\ &- \left\{(x^{\nu})^{\alpha-1}\partial_{\nu}\phi\right\}_{\nu}\left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\Psi^{2-\alpha}_{\mu}\right\}_{\mu} + \\ &+ \partial^{\alpha}_{\nu}\phi\left\{(x^{\mu})^{2(\alpha-1)}\Psi^{2-\alpha}_{\mu}\right\}_{\mu}. \end{aligned} \tag{36}$$

Application au champ scalaire

Tenseur moment angulaire pour le champ scalaire

En utilisant (31) et (35), on obtient

$$\mathcal{M}_{\lambda}^{\mu,\delta} = x^{\delta}\Big[\left\{(x^{\nu})^{\alpha-1}\eta_{\lambda}^{\nu}\right\}_{\nu}\partial_{\nu}\phi\left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\Psi_{\mu}^{2-\alpha}\right\}_{\mu} - \\ - \left\{(x^{\mu})^{\alpha-1}\eta_{\lambda}^{\mu}\left(\frac{1}{2}\Psi_{\mu}^{2} - \frac{1}{2}m^{2}\phi^{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^{4}\right)\right\}_{\mu} - \\ - \partial_{\lambda}^{\alpha}\phi\left\{(x^{\mu})^{2(\alpha-1)}\Psi_{\mu}^{2-\alpha}\right\}_{\mu}\Big]. \qquad (37)$$

Remarques et conclusion

- Notons que le passage de l'espace ordinaire à l'espace à dérivées fractionnaires se fait juste par changement des paramètres de l'un à l'autre et non par une quelconque transformation.
- Dans cet exposé nous avons fait une étude d'une classe particulière de dérivée fractionnaire. Nous avons montré comment une telle dérivation peut modifier certains résultats de la théorie classique des champs tels que les courants de Noether.
- Les tenseurs calculés peuvent être régularisés par la méthode de Wilson. En effet on calcule $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = u$. Ensuite on trouve le tenseur supplémentaire t^μ tel que $t^\mu = \partial^\mu u$. Le tenseur régularisé sera noté $\mathcal{J}_R^\mu = \mathcal{J}^\mu - t^\mu$.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION