Méthodes mathématiques de la théorie quantique - 2022

Bases de l'Information quantique - Day 5

Nana Engo
serge.nana-engo@facsciences-uy1.cm

Department of Physics
Faculty of Science
University of Yaounde I

https://github.com/NanaEngo/Memaquan2022

Bénin, 11-15 Juillet 2022

Sommaire - Day 5 - 15 Juillet 2022

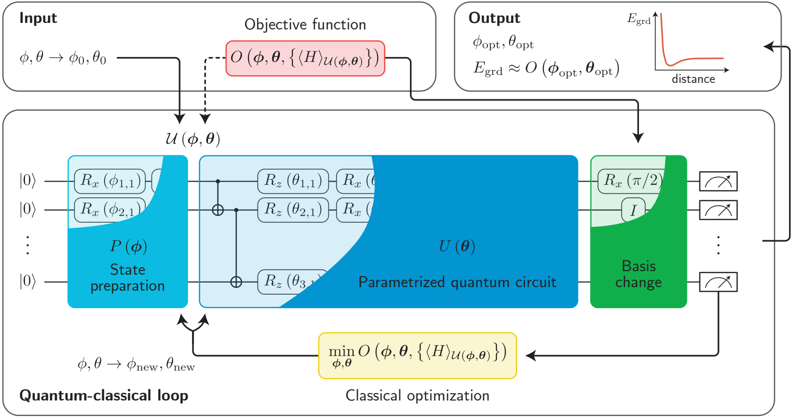
Variational Quantum Algorithm

Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ)

- La finalité du calculateur quantique est une technologie dans laquelle on sait comment contourner de façon fiable et reproductible l'effet néfaste du bruit environnemental dans les qubits (élément de base du calcul quantique). Mais il est difficile de prédire le moment où on en sera là.
  - Mise en œuvre des codes de correction d'erreurs que l'on appelle QEC pour Quantum Error Correction ou plutôt QECC pour QEC Codes
- Depuis 2014 on utilise plutôt le paradigme des NISQ, Noisy Intermediate Scale Quantum computers, des calculateurs quantiques qui sont bruités et non corrigés
  - Ils effectuent des tâches qui dépassent les capacités des calculateurs classiques d'aujourd'hui, mais le bruit dans les portes quantiques limite la taille des circuits quantiques (dizaines à un centaine) qui peut être exécuté de manière fiable
- Les algorithmes quantiques variationnels ou VQA (algorithmes hybrides quantique/classique), inspirés du principe variationnel de la physique quantique, permettent de tirer profit des NISQ

Blocs de construction des VQA I

On peut aussi résumer un algorithme variationnel quantique par les quatre composants modulaires suivants :



Blocs de construction des VQA II

1. la **fonction de coût** ou **fonction objective**, qui est l'équation à minimiser variationnellement
2. un ou plusieurs **Circuit Quantique Paramétré (PQC, Parametrized Quantum Circuit)**, qui sont les circuits quantiques unitaires dont les paramètres sont manipulés dans la minimisation de la fonction de coût
3. le **schéma de mesure**, qui extrait les valeurs attendues nécessaires pour évaluer la fonction de coût
4. et l'**optimisation classique**, qui est la méthode utilisée pour obtenir le paramètre de circuit optimal et qui minimise la fonction de coût

VQA les plus populaires

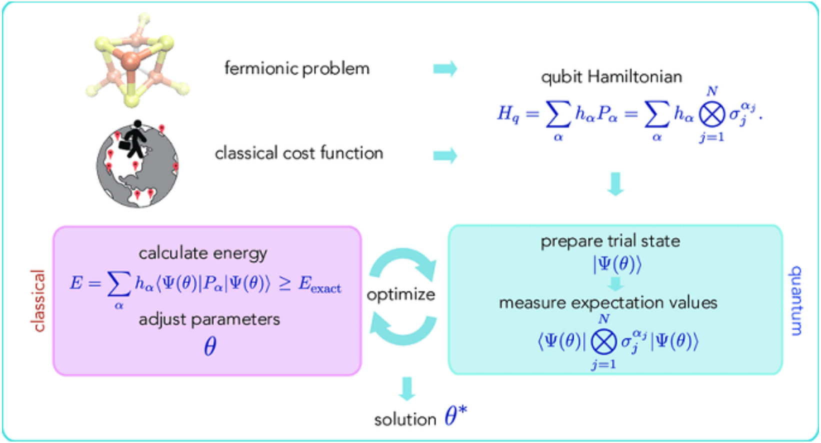
Les algorithmes variationnels quantiques les plus connus de nos jours sont

- Variational Quantum Eigensolver - VQE. Le Eigensolver quantique variationnel est utilisé pour approximer le niveau d'énergie le plus bas d'un Hamiltonien donné
- Quantum Approximate Optimization Algorithm - QAOA. L'algorithme d'optimisation quantique approximatif est principalement utilisé pour les problèmes d'optimisation combinatoire
- Classificateurs variationnels. Un classificateur variationnel est un circuit quantique qui est entraîné sur un ensemble de données pour classer des échantillons de données invisibles, rappelant les classificateurs classiques d'apprentissage automatique.
- Variational Quantum Linear Solvers. Le solveur variationnel quantique linéaire est utilisé pour résoudre des systèmes d'équations linéaires

Variational Quantum Algorithm

Schema du principe VQE

Chaque VQA a ses nuances, mais le principe de base est le suivant :



Processeur quantique VQE I

Le processeur quantique comporte trois étapes fondamentales

1. Définition du circuit quantique ou porte quantique $\mathtt{U}(\vec{\theta})$
2. Préparation de la fonction d'essai paramétré $|\Psi(\vec{\theta})\rangle$ appelée Ansatz, qui est essentiellement une estimation de l'état fondamental. A cet effet, on choisit arbitrairement un état de référence $|\psi_0\rangle$ sur lequel on applique $\mathtt{U}(\vec{\theta})$,
$$|\Psi(\vec{\theta})\rangle = \mathtt{U}(\vec{\theta})|\psi_0\rangle \tag{1}$$
3. Mesure de la valeur moyenne ou fonction de coût
$$C(\vec{\theta}) = \langle\Psi(\vec{\theta})|\mathtt{H}|\Psi(\vec{\theta})\rangle = \langle\psi_0|\mathtt{U}^\dagger(\vec{\theta})\mathtt{H}\mathtt{U}(\vec{\theta})|\psi_0\rangle \tag{2}$$

- Selon la décomposition spectrale, $\mathtt{H}$ peut être représenté par
$$\mathtt{H} = \sum_i E_i|E_i\rangle\langle E_i| \tag{3}$$

Processeur quantique VQE II

- En vertu du théorème variationnel de Rayleigh-Ritz, la valeur moyenne est toujours supérieure ou égale à la valeur propre E_0 la plus basse du Hamiltonien $\mathtt{H}$, qui correspond à l'état fondamental $|E_{\text{min}}\rangle$

$$C(\vec{\theta}) = \langle\psi_0|\mathtt{U}^\dagger(\vec{\theta})\mathtt{H}\mathtt{U}(\vec{\theta})|\psi_0\rangle = \sum_i |\alpha_i|^2 E_i \geq E_{\text{min}} \tag{4}$$

- Le problème se résume à trouver un tel choix optimal de paramètres $\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)^T$ à valeurs réelles, permettant de trouver la valeur moyenne minimale E_{min} qui est l'énergie de l'état fondamental et l'état correspondant est l'état fondamental $|E_{\text{min}}\rangle$.

Variational Quantum Algorithm

Variational Quantum Eigensolver - VQE

Panorama

Processeur classique VQE

En gros, le processeur classique

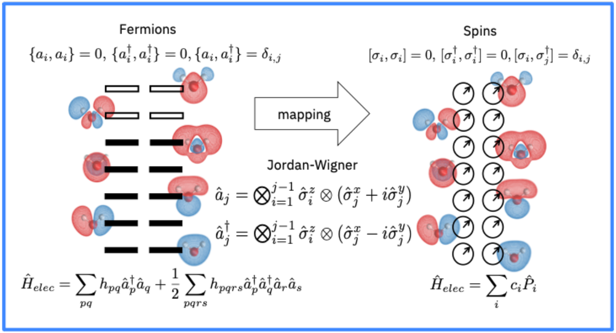
1. Minimise la valeur moyenne ou fonction de coût $C(\vec{\theta})$ en faisant varier les paramètres $\vec{\theta}$ de l'Ansatz, en utilisant un optimiseur classique

2. Itère jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint et que $|\psi(\vec{\theta})\rangle \simeq |E_0(\vec{\theta})\rangle$

Passage des $\{a, a^\dagger\} \Rightarrow \{\mathbb{I}, \mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}\}$

En simulation quantique, encoder un problème en seconde quantification sur un calculateur quantique revient à établir une correspondance entre les opérateurs d'échelle fermioniques et les opérateurs d'échelle qubit

- Mapping de **Jordan-Wigner**



- Mapping de la parité
- Mapping de Bravyi-Kitaev

Variational Quantum Algorithm

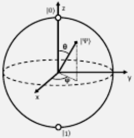
Variational Quantum Eigensolver - VQE

Panorama

Variable discrète et variable continue

Direct Variable vs Continuous Variable encoding of quantum information

DV: encoding in qubits



Discrete basis : $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Finite-dimentional Hilbert space

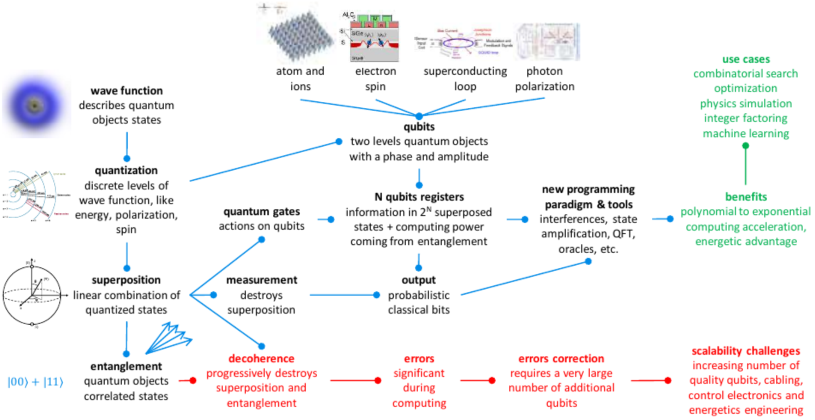
CV: encoding in continuous states, e.g. eigenstates of electromagnetic field quadratures $\hat{q}, \hat{p}$

Continuous basis : $|\Psi\rangle \propto \int d^2\alpha\psi(\alpha)|\alpha\rangle$

Infinite-dimentional Hilbert space

Inspired from « Sub-Universal Models of Quantum Computation in Continuous Variables » by Giulia Ferrini, Chalmers University of Technology, Genova, June 2018.

Panorama



(cc) Olivier Ezratty, 2021