Black Hole Physics - Part II

Júlio C. Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo

IMSP, Bénin, May 2019

Thermodynamique des trous noirs

- L'existence de l'horizon des événements génère des résultats très importants et inattendus.
- L'un d'eux est le fait de la création de particules à proximité d'un trou noir.
- Ce résultat est obtenu en considérant un champ quantique dans l'espace-temps d'un trou noir. Les particules sont créées suivant un état (quasi) thermique.
- Cela conduit à la notion d'évaporation d'un trou noir, et par la suite à la thermodynamique de tels objets.

Thermodynamique des trous noirs

- Un trou noir a une température qui est liée aux phénomènes de création de particules dans son voisinage.
- La température d'un trou noir est donnée par l'expression $(c = \hbar = G = 1)$:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \tag{1}$$

où κ est la gravité de surface donnée par,

$$\kappa = \frac{1}{2}\frac{g_{00}}{\sqrt{g_{00}g_{11}}}\bigg|_{r=r_H}. \tag{2}$$

Thermodynamique des trous noirs

- Pour Scharwzschild,

$$g'_{00} = 2\frac{M}{r^2}. \tag{3}$$

- Vu que,

$$r_H = 2M, \tag{4}$$

nous avons,

$$g'_{00}\Big|_{r=r_H} = \frac{1}{2}\frac{1}{M}, \tag{5}$$

conduisant à,

$$\kappa = \frac{1}{4}\frac{1}{M}. \tag{6}$$

Thermodynamique des trous noirs

- La température,

$$T = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{M}. \tag{7}$$

Thermodynamique des trous noirs

- Rétabilssant les unités,

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B}\frac{1}{M} = 1.5\frac{M_\odot}{M}10^{-6}K. \tag{8}$$

- Donc un trou noir de la masse du Soleil a une température de l'ordre de μK.

Thermodynamique des trous noirs

- L'expression de la température du trou noir peut être comprise en exprimant la gravité de surface en termes de potentiel newtonien :

$$\kappa = \Phi', \tag{9}$$

  c'est-à-dire que la gravité de surface équivaut à un champ de force près de l'horizon.
- Ainsi, l'espace-temps proche horizon correspond à un espace-temps de Rindler accéléré, pour lequel la création de particules est vérifiée.

Thermodynamique pour le trou noir Reissner-Nordström

- La solution de RN est,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad , \quad (10)$$

M étant Q la masse.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- La métrique de RN peut être écrite aussi comme

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1-\frac{r_-}{r}\right)\left(1-\frac{r_+}{r}\right)dt^2 - \left\{\left(1-\frac{r_-}{r}\right)\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\right\}^{-1}dr^2 \\
&- r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \quad , \qquad (11)
\end{aligned}
$$

  ave $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-Q^2}$.
- Les solutions representant un trou noir impliquent $M \geq Q$, tandis que les solutions du type singularité nue impliquent $M < Q$.
- Le cas $M = Q$ correspond au cas extrême.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- On peut utiliser les nouvelles coordonnées,

$$u = t - r^* \quad , \quad v = t + r^* \quad , \tag{12}$$

$$r^* = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln\left[\frac{r}{r_+} - 1\right] - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln\left[\frac{r}{r_-} - 1\right] \quad . \tag{13}$$

- Avec ces nouvelles coordonnées,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) du\, dv - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad . \tag{14}$$

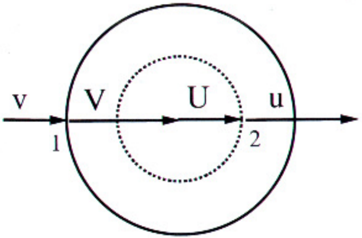
Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Désormais, un modèle à deux dimensions sera considéré, en ignorant l'angle termes.
- Pour les champs quantiques à considérer plus tard, cela revient à considérer le terme angulaire avec $l = 0$ (zéro angulaire élan).
- Mais, les résultats finaux ne dépendent pas de cette hypothèse, étant valable pour général l.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Considérons le modèle simplifié d'une coque mince qui s'effondre.
- Quand $t \to -\infty$, la densité de la coque tend vers zéro et l'espace-temps est plat.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström



Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Dans cet espace-temps considérons un champ scalaire sans masse (juste pour simplifier), dont les modes quantiques sont gouvernés par l'équation de Klein-Gordon,

$$\Box\phi = 0. \tag{15}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Ainsi, au passé infini, un champ quantique scalaire peut être étendu dans les modes normaux

$$\phi = \int d\omega \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left(a_\omega e^{-i\omega v} + a^\dagger_\omega e^{i\omega v} \right), \tag{16}$$

où nous venons de considérer les modes entrants donnés par les coordonnée v.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Après l'effondrement de la couche, un trou noir est formé étant donné un espace-temps décrit par la métrique de Reisnner-Nordström, qui est asymptotiquement plat.
- D'où le mode de résultat à $t \to \infty$ est donné par

$$\phi = \int d\omega \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \left(b_\omega e^{-i\omega u} + b^\dagger_\omega e^{i\omega u} \right). \tag{17}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Le problème à résoudre est de savoir comment relier les coordonnées u et v, obtenant ainsi les coefficients de Bogolubov de la transformation

$$\frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{4\pi\omega}} = \int_0^\infty \left\{ \alpha_{\omega\omega'} e^{-i\omega' v} + \beta_{\omega\omega'} e^{i\omega' v} \right\} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \tag{18}$$

avec la transformation inverse,

$$\frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}} = \int_0^\infty \left\{ \alpha^*_{\omega'\omega} e^{-i\omega' u} - \beta_{\omega'\omega} e^{i\omega' u} \right\} \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \quad . \tag{19}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Le coefficient $\beta_{\omega\omega'}$ est lié au nombre de particules détectée par un observateur dans le futur infini pour chaque fréquence ω.
- Les coefficients de Bogolubov satisfont les relations de cohérence,

$$\int_0^\infty \left\{\alpha_{\omega\omega'}\alpha^*_{\omega''\omega'} - \beta_{\omega\omega'}\beta^*_{\omega''\omega'}\right\}d\omega' = \delta(\omega - \omega''), \quad (20)$$

$$\int_0^\infty \left\{\alpha_{\omega\omega'}\beta_{\omega''\omega'} - \beta_{\omega\omega'}\alpha_{\omega''\omega'}\right\}d\omega' = 0. \quad (21)$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Remarquez que,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \alpha_{\omega\omega'}\alpha^*_{\omega''\omega'} - \beta_{\omega\omega'}\beta^*_{\omega''\omega'} \right\} d\omega' d\omega'' = 1 \quad , \qquad (22)$$

une condition de normalisation à être utilisée après.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Un mode entrant v vient du passé infini, parcourant le couche qui s'effondre, devenant plus tard un mode de résultat, traversant à nouveau la couche et atteignant le futur infini.
- Les modes sont continus, dans le sens où $v|_{R=R_1} = V|_{R=R_1}$, $V|_{R=0} = U|_{R=0}$, $U|_{R=R_2} = u|_{R=R_2}$, où u et v sont les entrées et les sorties modes dans la géométrie externe déterminée par la couche, tandis que U et V sont les mêmes modes dans la géométrie interne minkowskienne, et R_1 et R_2 sont le rayon de la couche au premier et au deuxième traversée, respectivement.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Un point important dans ce dérivation est que l'effondrement est accéléré de telle manière que la vitesse de l'effondrement de la couche se rapproche de la vitesse de la lumière au moment de la formation de l'horizon des événements.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Au deuxième croisement, que nous admettons se produire près du moment de la formation de la trou noir, la continuité de la métrique conduit à

$$dT^2 - dR^2 = \left[1 - \frac{r_+}{R}\right]\left[1 - \frac{r_-}{R}\right]dt^2 - \left\{\left[1 - \frac{r_+}{R}\right]\left[1 - \frac{r_-}{R}\right]\right\}^{-1} dR^2 \quad . \tag{23}$$

- Au moment de la seconde traversée, on peut considérer que

$$R \approx r_+ + A(T_0 - T) \quad , \tag{24}$$

où A est une constante et T_0 est le temps où le trou noir est formé.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Compte tenu de la continuité de les modes entrants, ce qui permet d'exprimer T en termes de v, il résulte la relation suivante entre les modes u et v :

$$u = -2\sigma \ln\left[\frac{v_0 - v}{C}\right] \tag{25}$$

où $\sigma = \kappa^{-1} = r_+^2/(r_+ - r_-)$ est l'inverse de la gravité de surface, C est une constante et $v_0 = T_0 - r_+$.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- En utilisant le produit interne dans le sense de Klein-Gordon,

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int d\Sigma^\mu \left(\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - \partial_\mu \phi_1 \phi_2^*\right) = -i \int d\Sigma^\mu \phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^* \quad , \tag{26}$$

définissant $f_\omega = e^{-i\omega v}/\sqrt{4\pi\omega}$, $g_\omega = e^{-i\omega u(v)}/\sqrt{4\pi\omega}$, nous obtenons,

$$\alpha_{\omega\omega'} = (g_\omega, f_{\omega'}) \quad , \quad \beta_{\omega\omega'} = -(g_\omega, f^*_{\omega'}) \quad . \tag{27}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Les coefficients de Bogolubov peuvent être exprimer en termes des intégrales,

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'} &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}}\exp[i(\omega' v_0 - 2\sigma\omega\ln C - 2\sigma\omega\ln\omega')] \\ &\times \int_0^\infty e^{-i(y-2\sigma\omega\ln y)}\left\{1+\frac{2\sigma\omega}{y}\right\}dy, \qquad (28)\\ \beta_{\omega\omega'} &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}}\exp[-i(\omega' v_0 + 2\sigma\omega\ln C + 2\sigma\omega\ln\omega')] \\ &\times \int_0^\infty e^{i(y+2\sigma\omega\ln y)}\left\{1-\frac{2\sigma\omega}{y}\right\}dy, \qquad (29)\end{aligned}$$

avec $y = \omega'(v_0 - v)$.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Utilisant la relation,

$$\int_0^\infty e^{\pm iy} y^{ia} dy = \frac{\Gamma[1+ia]}{(\pm i)^{\mp i\pi/2+ia}} = \mp a\Gamma(ia)e^{\mp\pi/2}, \qquad (30)$$

nous avons les expressions suivantes pour les coefficients de Bogolubov:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega\omega'} &= \frac{2\sigma\omega}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}}\Gamma(2i\sigma\omega)e^{\sigma\pi\omega} \\ &\times \exp[i(\omega' v_0 - 2\sigma\omega \ln C - 2\sigma\omega \ln\omega')] \quad , \qquad (31) \\ \beta_{\omega\omega'} &= -\frac{2\sigma\omega}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}}\Gamma(2i\sigma\omega)e^{-\sigma\pi\omega} \\ &\times \exp[-i(\omega' v_0 + 2\sigma\omega \ln C + 2\sigma\omega \ln\omega')] \quad . \qquad (32) \end{aligned}$$

- Il est important de remarquer que avec la condition extreme $\sigma \to \infty$, le coefficient β devient zéro.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Considérons les conditions de consistence pour les coefficients de Bogolubov.
- On obtient,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \alpha_{\omega\omega'} \alpha^*_{\omega''\omega'}$$
$$= \sigma^2\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} d\omega'' \sqrt{\omega\omega''}$$
$$\times \Gamma(2i\sigma\omega)\Gamma(-2i\sigma\omega'')e^{\pi\sigma(\omega+\omega'')}e^{\{-2i\sigma(\omega-\omega'')[\ln C+\ln\omega']\}} \quad ,$$
$$= \frac{2\sigma^2}{\pi}\int_0^\infty d\omega''\sqrt{\omega\omega''}$$
$$\times \Gamma(2i\sigma\omega)\Gamma(-2i\sigma\omega'')e^{\pi\sigma(\omega+\omega'')}e^{[-2i\sigma(\omega-\omega'')]}\delta[2\sigma(\omega-\omega'')] \quad ,$$
$$= \frac{1}{2}\frac{e^{2\pi\sigma\omega}}{\sinh(2\pi\sigma\omega)} \quad . \tag{33}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Nous avons utilisé la relation,

$$\Gamma(ia)\Gamma(-ia) = \frac{\pi}{a\sinh(\pi a)} \quad . \tag{34}$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Un calcul similaire conduit à,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta^*_{\omega''\omega'} = \frac{1}{2} \frac{e^{-2\pi\sigma\omega}}{\sinh(2\pi\sigma\omega)} \quad . \tag{35}$$

- La condition de normalisation peut être ainsi obtenue :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \alpha_{\omega\omega'} \alpha^*_{\omega''\omega'} - \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta^*_{\omega''\omega'} =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{e^{2\pi\sigma\omega}}{\sinh(2\pi\sigma\omega)} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2\pi\sigma\omega}}{\sinh(2\pi\sigma\omega)} = 1 \quad . (36)$$

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- La température de Hawking peut être obtenue de deux manières équivalentes.
- D'abord en calculant le nombre de particules de fréquence ω dans le futur infini,

$$N_\omega = \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'} \beta^*_{\omega''\omega'} . \tag{37}$$

- Ou computant,

$$||\alpha_{\omega\omega'}|| = e^{\pi\sigma\omega} ||\beta_{\omega\omega'}|| \tag{38}$$

et en utilisant la condition de normalisation.

Thermodynamique pour le trou noir de Reissner-Nordström

- Le resultat est:

$$N_\omega = \frac{1}{e^{2\pi\sigma\omega} - 1} \quad . \tag{39}$$

Ceci est caractéristique d'un spectre planckien de température $T = 1/(2\pi\sigma)$. Dans le cas non extrême de Reissner-Nordström traité auparavant, cette température se lit

$$T = \frac{1}{8\pi M}\left(1 - \frac{16\pi^2 Q^4}{A^2}\right) \quad , \tag{40}$$

où $A = 4\pi r_+^2$ est l'aire de l'horizon des événements. On peut vérifier que quand $Q \to M$, $T \to 0$.

L'entropie

- Nous avons calculé la température du trou noir.
- Nous pouvons continuer et calculer l'entropie du trou noir.
- Nous le ferons pour le trou noir de Schwarzschild même s'il n'est pas difficile de l'évaluer pour le trou noir de Reissner-Nordstrom. Nous laissons ce dernier cas en exercice.

L'entropie

- Première loi de la thermodynamique :

$$TdS = dE. \tag{41}$$

- On peut associer l'énergie stockée dans un trou noir à sa masse.
- Par conséquent,

$$TdS = dM. \tag{42}$$

L entropie

- Pour Schwarzschild,

$$T = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{M}. \tag{43}$$

- Donc,

$$dS = 8\pi M dM. \tag{44}$$

- Intégrant :

$$S = 4\pi M^2. \tag{45}$$

L'entropie

- En utilisant le fait que le rayon de l'horizon pour le trou noir de Schwarzschild est,

$$r_H = 2M, \tag{46}$$

- L'entropie du trou noir peut être exprimée en termes d'aire de la surface de l'horizon :

$$S = \frac{A_H}{4}. \tag{47}$$

- Cela semble être une loi assez générale : l'entropie d'un trou noir est donnée par un quart de sa surface d'horizon des événements.
- Le fait que l'entropie d'un trou noir soit encodée à sa surface est à la base du principe holographique et de la correspondance AdS/CFT.

L'entropie

- Lorsque la masse d'un trou noir augmente, sa température diminue, tandis que son entropie augmente.
- Ceci est dû au fait que la capacité calorifique d'un trou noir est négatif, comme cela arrive fréquemment avec les systèmes gravitationnels.

Obrigado! Merci! Kouchê!

Kitty, §22/12/2005 †28/11/2018