

Equations géodesiques

- ▶ Particules testées suivent des trajectoires géodesiques dans l'espace-temps.
- ▶ L'équation géodesique est donnée par,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (1)$$

où λ est le paramètre afin.

Equations géodesiques

- ▶ Utilisant la métrique de Schwarzschild,

$$ds^2 = Bdt^2 - A dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

les équations géodesique impliquent,

$$\dot{t} = \frac{E}{B}, \quad (3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (4)$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - B \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right). \quad (5)$$

- ▶ Dans ces expressions E , L et m sont constantes liées à l'énergie, momentum angulaire, et la masse de la particule.

Equations géodesiques

- ▶ Les équations géodesiques peuvent être combinées dans une seule équation:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = B \left\{ 1 - \frac{B}{E^2} \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (6)$$

- ▶ Cet équation a une forme semblable à la trajectoire d'une particule en physique newtonienne:

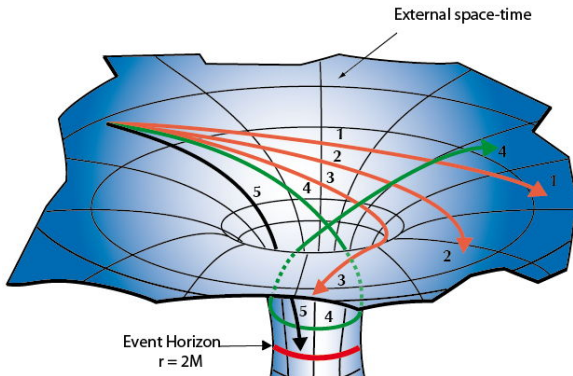
$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r) = E. \quad (7)$$

Equations géodesiques

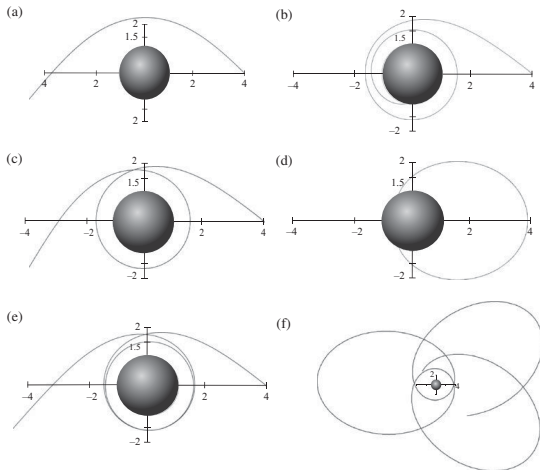
- ▶ On peut ainsi en déduire, par exemple, *l'orbite circulaire stable plus intérieure*:

$$R_{ISCO} = 6GM. \quad (8)$$

Géodesiques



Géodesiques



Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ La solution intérieure est la solution en présence de matière, solution valable à l'intérieur de l'étoile.
- ▶ Il faut donc considérer aussi le membre de droite des équations de champ, en introduisant, par exemple, un fluide qui obéit aux symétries requises.
- ▶ La masse volumique et la pression ne doivent dépendre que de la coordonnée radiale r .

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ Considérons de nouveau la métrique,

$$ds^2 = Bdt^2 - A dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (9)$$

- ▶ Les coordonnées co-mobiles impliquent,

$$u^\mu = (1/\sqrt{B}, 0, 0, 0). \quad (10)$$

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- Les équations dans la présence de matière sont les suivantes:

$$\frac{1}{2} \frac{B''}{A} - \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = 4\pi G(\rho + 3p)B \quad (11)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{B''}{B} + \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = 4\pi G(\rho - p)A, \quad (12)$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{r}{A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = 4\pi G(\rho - p)r^2. \quad (13)$$

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ Les équations de conservation se réduisent à :

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + 4\pi r^3 \frac{p}{M}\right)}{1 - 2\frac{GM}{r}}, \quad (14)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (15)$$

- ▶ Ces équations s'appelle *TOV* (Tolman-Oppenheimer-Volkoff).

The interior, static spherically symmetric solution

- ▶ L'équation TOV doit être calculée numériquement en général.
- ▶ Pour cela, nous devons spécifier une équation d'état reliant la pression et la densité.

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ A simple equation of state, not complete realistic, but which grasp some of the main features, is given by,

$$p = K\rho^2, \quad (16)$$

where K is a constant.

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ Pour la plupart des étoiles, les effets relativistes sont petits.
- ▶ Pour le Soleil,

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \sim 10^{-6}. \quad (17)$$

- ▶ Dans ces cas on peut travailler avec les équations newtoniennes:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}, \quad (18)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (19)$$

- ▶ Ce sont les équations de Lane-Emden qui admettent des solutions exactes pour certains cas.

Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ Les équations relativistes complètes, cependant, peuvent être très importantes pour certains objets compacts, comme les étoiles à neutrons.
- ▶ Les étoiles à neutrons ont une masse allant jusqu'à $2 M_{\odot}$, et un rayon de l'ordre de 10 km .
- ▶ Sa densité est comparable à la densité nucléaire.
- ▶ Ainsi, le potentiel sans dimension (qui caractérise l'importance des effets de la Relativité Générale) pour une étoile à neutrons est typiquement de l'ordre (l'indice N indiquant *étoile à neutrons*,

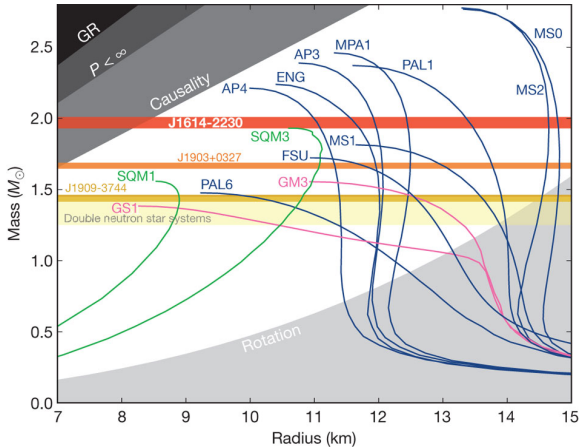
$$2 \frac{GM_N}{c^2 R_N} \sim 0.1, \quad (20)$$

qui est assez grand : la Relativité Générale ne peut être ignorée.

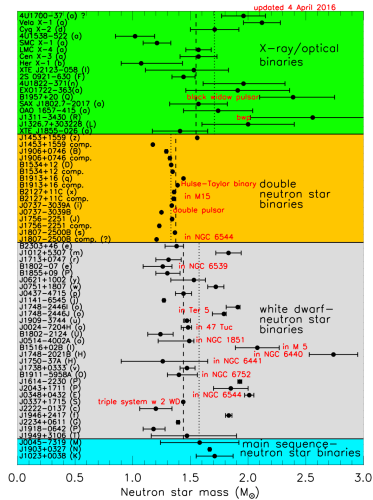
Les solutions statiques, sphériques, intérieur

- ▶ L'équation d'état d'une étoile à neutrons est toujours en discussion, étant à l'interface de la gravitation, de la physique des particules et de la physique nucléaire.

Les solutions statiques, sphériques, intérieur



Les solutions statiques, sphériques, intérieur



Trous noirs chargés

- ▶ La solution de Schwarzschild représente la structure de trou noir la plus simple qui puisse être obtenue dans le cadre de la théorie de la relativité générale.
- ▶ La solution est caractérisé par un paramètre unique : la masse M du trou noir.
- ▶ On peut obtenir aussi une solution assez simple si l'on considère un trou noir chargé.

Trous noirs chargés

- ▶ Pour un trou noir chargé il faut prendre en compte les équations GR couplées à un champ électromagnétique.
- ▶ Ces équations sont,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right), \quad (21)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (22)$$

- ▶ $F^{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique.

Trous noirs chargés

- ▶ Nous nous intéressons aux solutions statiques à symétrie sphérique.
- ▶ C'est donc la même chose qu'avant, avec les mêmes composantes non nulles pour les symboles de Christoffel, les tenseurs de Ricci et Riemann, et le scalaire de Ricci.
- ▶ Afin de conserver la symétrie sphérique, la seule composante non nulle du tenseur électromagnétique doit être la composante radiale :

$$F^{01} \neq 0. \quad (23)$$

- ▶ Donc, écrivons,

$$F^{01} = E(r). \quad (24)$$

Trous noirs chargés

- ▶ Le tenseur d'impulsion-énergie s'écrit,

$$T_{\mu\nu} = -\left(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right). \quad (25)$$

- ▶ La trace est zéro:

$$T^{\rho}{}_{\rho} = 0. \quad (26)$$

- ▶ Donc,

$$R = 0, \quad (27)$$

comment dans le cas du vide.

Trous noirs chargés

► Nous avons donc,

$$R_{00} = \frac{1}{2} E^2 B^2 A \quad (28)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} E^2 A^2 B, \quad (29)$$

$$R_{22} = E A B r^2. \quad (30)$$

Trous noirs chargés

- Les équations finales sont,

$$\frac{1}{2} \frac{B''}{A} - \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = \frac{1}{2} E^2 B, \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{B''}{B} + \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = -\frac{1}{2} E^2 A, \quad (32)$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{r}{A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} = \frac{1}{2} A B E^2 r^2. \quad (33)$$

Trous noirs chargés

- ▶ La conservation de le tenseur d'impulsion-énergie donne,

$$E' + \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) E = 0. \quad (34)$$

Trous noirs chargés

- ▶ Comme dans le cas de Schwarzschild, on trouve,

$$\frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0. \quad (35)$$

- ▶ De nouveau,

$$A = \frac{1}{B}. \quad (36)$$

- ▶ Cela conduit à,

$$E = \frac{Q}{r^2}. \quad (37)$$

Trous noirs chargés

- ▶ Nous obtenons l'équation,

$$B' + \frac{B}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{r^3}. \quad (38)$$

- ▶ La solution est,

$$B = 1 - 2 \frac{GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (39)$$

Trous noirs chargés

- ▶ La métrique prends la forme,

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. (40)$$

- ▶ Elle peut être écrite comme,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2, (41)$$

où

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (42)$$

- ▶ Par simplicité nous avons fixé $G = 1$.

Trous noirs chargés

- ▶ L'horizon est caractérisé par $B = 0$.
- ▶ Nous avons maintenant deux horizons:

$$r = r_+ \quad \text{et} \quad r = r_- . \quad (43)$$

Trous noirs chargés

- ▶ Nous avons trois possibilités selon les valeurs de M et Q :
 - ▶ Si $M > Q$ il y a deux horizons, un $r = r_+$ (l'horizon événement) l'autre à $r = r_-$ (l'horizon de Cauchy);
 - ▶ Si $M = Q$ les deux horizons coïncident et nous avons le cas *extrême*;
 - ▶ Si $M < Q$, l'expression de l'horizon devient imaginaire et nous avons une singularité nue.

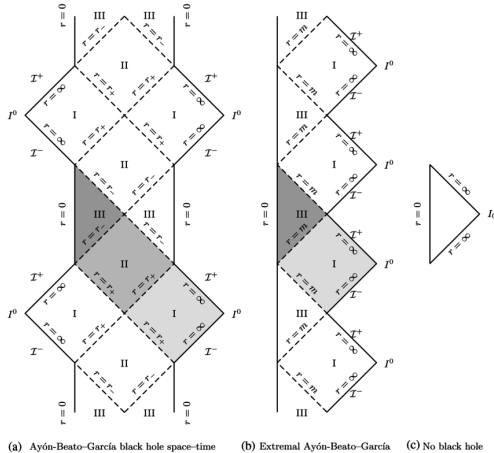
Trous noirs chargés

- ▶ Le cas de la singularité nue ($M < Q$) peut être une configuration non physique, puisque le fait qu'il n'y ait pas d'horizon pour "couvrir" la singularité implique que toute prévisibilité est perdue.
- ▶ Il est important de remarquer que la singularité est maintenant de type temps.
- ▶ Cela implique qu'il peut être évité par une particule test. Ainsi, pour les cas d'un trou noir non extrême nous avons un tour des régions I, de signatures $(+ - - -)$, des régions II, de signature $(- + - -)$ et III, toujours de signature $(+ - - -)$, séparés par des horizons, la singularité temporelle étant placée dans la région II

Trous noirs chargés

- ▶ A l'extrême, seules les régions I et III sont présentées, séparées par un horizon dégénéré.
- ▶ Dans le cas d'une singularité nue, au lieu d'un tour de régions différentes, il n'y a que la région I qui contient la singularité non couverte par un horizon.

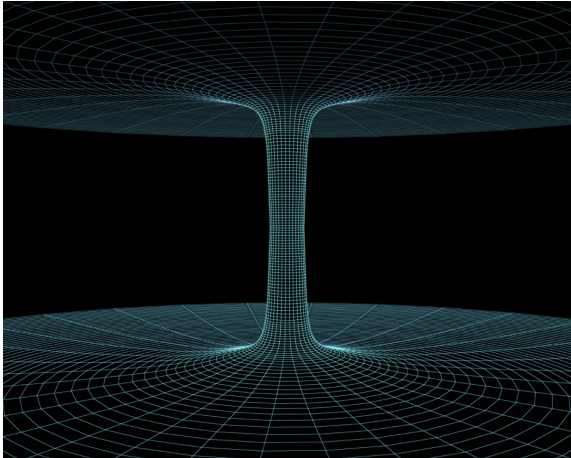
Trous noirs chargés



Trous de ver

- ▶ Parmi les solutions statiques à symétrie sphérique des équations de la relativité générale, certaines présentent une propriété remarquable : elles représentent une transition entre deux espaces-temps asymptotiquement Minkowski, avec une fonction radiale qui se contracte initialement, atteignant un minimum et se développe ensuite vers un autre plat asymptotique. espace-temps.
- ▶ En raison de ce comportement général, on les appelle des trous de ver, un *tunnel* reliant deux univers, qui sont l'espace-temps asymptotique de Minkowski.

Trous de ver



Trous de ver

- ▶ Un exemple simple de trou de ver est donné par la solution d'Ellis-Bronnikov.
- ▶ La métrique décrivant la solution d'Ellis-Bronnikov est donnée par,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (r^2 + a^2)d\Omega^2, \quad (44)$$

a constant.

- ▶ Lorsque $r \rightarrow \pm\infty$, on atteint l'espace-temps de Minkowski.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (45)$$

Trous de ver

- ▶ Avec la métrique écrite sous la forme,

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} dr^2 - e^{2\beta} d\omega^2, \quad (46)$$

les fonctions métrique de la solution de Ellis-Bronnikov sont,

$$\gamma = \alpha = 0, \quad \beta = \ln \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (47)$$

- ▶ La fonction radiale β a un minimum à $r = a$, dénommé *gorge*.

Trous de ver

- ▶ Si nous utilisons la métrique statique à symétrie sphérique dans sa forme générale, les expressions non nulles correspondantes pour le tenseur de Ricci sont :

$$R_{00} = e^{2(\gamma-\alpha)}[\gamma'' + \gamma'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')], \quad (48)$$

$$R_{11} = -[\gamma'' + 2\beta'' + \gamma'(\gamma' - \alpha') + 2\beta'(\beta' - \alpha')], \quad (49)$$

$$R_{22} = 1 - e^{2(\beta-\alpha)}[\beta'' + \beta'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')]. \quad (50)$$

Trous de ver

- Avec $\alpha = \gamma = 0$, les expressions se réduisent à,

$$R_{00} = 0, \quad (51)$$

$$R_{11} = -[2\beta'' + 2\beta'^2], \quad (52)$$

$$R_{22} = 1 - e^{2\beta}[\beta'' + 2\beta'^2]. \quad (53)$$

Trous de ver

- ▶ La solution du trou de ver peut être obtenue en considérant la gravité couplée de manière minimale à un champ scalaire sans masse :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \epsilon \left(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} \right), \quad (54)$$

où ϵ peut être égal à 1 (champ scalaire ordinaire) ou -1 (champ fantôme).

- ▶ L'équation du champ d'équation peut être écrite comme,

$$R_{\mu\nu} = \epsilon\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}. \quad (55)$$

- ▶ Le champ scalaire obéit à l'équation libre de Klein-Gordon,

$$\square\phi = 0. \quad (56)$$

Trous de ver

- ▶ Ainsi:

$$-[2\beta'' + 2\beta'^2] = \epsilon\phi'^2 \quad (57)$$

$$1 - e^{2\beta}[\beta'' + 2\beta'^2] = 0. \quad (58)$$

- ▶ L'équation de Klein-Gordon devient

$$\phi'' + 2\beta'\phi' = 0. \quad (59)$$

Trous de ver

- ▶ La solution pour Klein-Gordon est:

$$\phi' = Ce^{-2\beta} = \frac{C}{r^2 + a^2}. \quad (60)$$

- ▶ La solution est consistante si $\epsilon = -1$ puisque,

$$-2 \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} = \epsilon \frac{C^2}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (61)$$

- ▶ Donc, $C = \sqrt{2}a$.
- ▶ Ce résultat, même si très particulier, contient une information très importante : en général, dans le contexte habituel de la Relativité Générale, un trou de ver demande énergie négative pour soutenir la gorge.

Trous de ver

- ▶ Quelques mots sur les conditions énergétiques.
- ▶ Les conditions énergétiques sont généralement liées aux formes *normales* de la matière.

Trous de ver

- ▶ La condition d'énergie forte

$$\rho + 3p \geq 0, \quad (62)$$

est lié à la convergence des géodésiques.

- ▶ La condition d'énergie nulle,

$$\rho + p \geq 0, \quad (63)$$

implique qu'une observation physique mesurera localement une énergie positive.

- ▶ La violation de la condition d'énergie nulle implique, dans le cas d'un champ scalaire, un signe *inversé* pour le terme cinétique.

Trous de ver

- ▶ Lors de la discussion sur les trous de ver, un aspect important est de savoir s'il peut être traversé par un être humain.
- ▶ Afin de répondre à cette question, un critère possible est d'admettre que les forces de marée données par les composantes du tenseur de Riemann ne doivent pas conduire à des accélérations supérieures à l'accélération terrestre.
- ▶ Cela peut être énoncé mathématiquement par,

$$|R_{0i0j}a| \sim g_{\oplus}. \quad (64)$$

D'autres solutions importantes

- ▶ Il y a des solutions dans la présence d'une constante cosmologique.
- ▶ Dans ce cas, les équations sont,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (65)$$

D'autres solutions importantes

- ▶ La solution est,

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

- ▶ Remarquons que la présence de la constante cosmologique conduit à un potentiel répulsif lorsque $\Lambda > 0$ et à un potentiel attractif lorsque $\Lambda < 0$.
- ▶ Une autre propriété importante de cette solution est qu'elle n'est pas asymptotiquement plate, contrairement aux cas précédents.

D'autres solutions importantes

- ▶ Une solution tournante peut être obtenue en considérant une métrique stationnaire (non statique ni à symétrie sphérique), de la forme,

$$ds^2 = Bdt^2 - A dr^2 - C dt d\phi - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (67)$$

- ▶ Cette forme de la métrique implique la stationnarité, mais pas la staticité : la métrique n'est pas invariante par la transformation $t \rightarrow -t$.

D'autres solutions importantes

- ▶ Le trou noir en rotation, connu sous le nom de solution de Kerr, est décrit par la métrique,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 + 2a \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi \\
 & - \frac{\left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right]}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2
 \end{aligned}$$

D'autres solutions importantes

- ▶ Définitions:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (69)$$

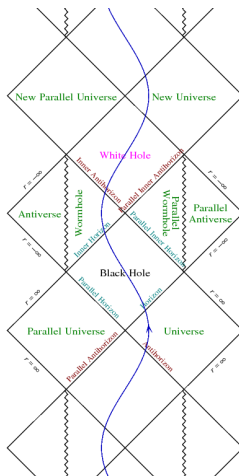
$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (70)$$

- ▶ En plus,

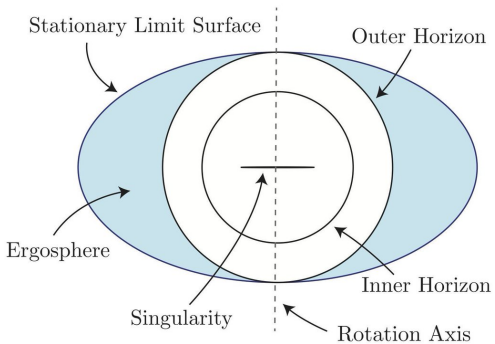
$$a = \frac{J}{M}, \quad (71)$$

J étant le momentum angulaire.

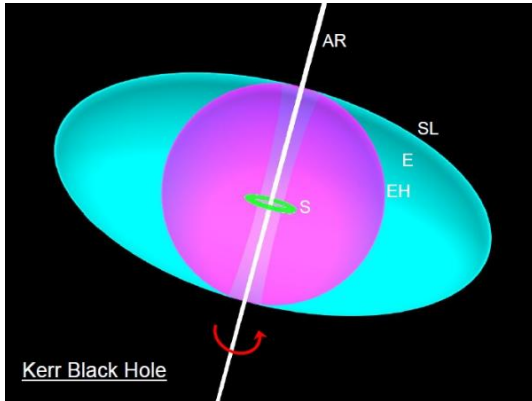
Trou noir de Kerr



Trou noir de Kerr



Trou noir de Kerr



Le trou noir de Kerr

- ▶ Il y a aussi pour Kerr un cas extrême:

$$a = M. \tag{72}$$

La simplicité des trous noirs

- ▶ Du point de vue de sa caractérisation, le trou noir est l'objet le plus simple de la nature : il suffit de donner sa masse, son spin et sa charge.