Solutions statiques à symétrie sphériques

- Rappelons les équations de la Relativité Générale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

avec les définitions,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho}, \tag{2}$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{g^{\rho\sigma}}{2} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right). \tag{3}$$

Solutions statiques à symétrie sphériques

- Le premier problème important de la théorie GR à résoudre était celui de l'espace-temps statique à symétrie sphérique.
- Ce problème a des implications directes pour l'étude de la structure des étoiles et, de plus, conduit à la possibilité de tester GR dans des problèmes astronomiques, comme l'avance du périhélie de Mercure, la déviation de la lumière des étoiles par le soleil.
- Ce problème conduit également au concept de trou noir, ouvrant une vaste branche pour les recherches en gravitation (et aussi en théorie quantique des champs !).

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Le premier problème important de la théorie GR à résoudre était celui de l'espace-temps statique à symétrie sphérique.
- Ce problème a des implications directes pour l'étude de la structure des étoiles et, de plus, conduit à la possibilité de tester GR dans des problèmes astronomiques, comme l'avance du périhélie de Mercure, la déviation de la lumière des étoiles par le soleil.
- Ce problème conduit également au concept de trou noir, ouvrant une vaste branche pour les recherches en gravitation (et aussi en théorie quantique des champs !).

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Une métrique statique à symétrie sphérique a la forme générale,

$$ds^2 = e^{2\gamma}dt^2 - e^{2\alpha}dr^2 - e^{2\beta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{4}$$

  où α, β et γ sont fonction de la coordonnée radiale r uniquement.
- Cette métrique est invariante par rapport à la rotation, comme attendu pour un espace à symétrie sphérique.
- Il est également invariant par rapport au reparamétrisation de la coordonnée radiale, ce qui implique que l'on peut imposer une condition aux fonctions α, β et γ.

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Sous la forme dite *quasi-globale*, on écrit $e^{2\gamma} = e^{-2\alpha} = A(\rho)$, et $e^{2\beta} = r^2(\rho)$.
- Par conséquent, la métrique prend la forme,

$$ds^2 = A(\rho)dt^2 - \frac{d\rho^2}{A(\rho)} - r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{5}$$

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Une autre forme qui peut être très utile dans de nombreuses situations est donnée par la condition $\alpha = \gamma + 2\beta$, appelée *jauge harmonique*, puisqu'elle simplifie considérablement l'équation d'onde.

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Par contre, si on impose $e^{2\beta} = r^2$ et on définit $e^{2\gamma} = B(r)$ et $e^{2\alpha} = A(r)$, la métrique prend la forme,

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{6}$$

- Dans ce qui suit, nous utilisons fréquemment cette forme pour la métrique.

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Les composants non null du symbole de Christoffel symbols sont,

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\frac{A'}{A} \quad , \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}, \tag{7}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r}{A}\sin^2\theta \quad , \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}\frac{B'}{A}, \tag{8}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \tag{9}$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \operatorname{cotg}\theta \quad , \quad \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}\frac{B'}{B}. \tag{10}$$

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Les composants non nulls du tenseur de Ricci sont,

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{1}{2}\frac{B''}{A} - \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{B'}{A}, && (11)\\
R_{rr} &= -\frac{1}{2}\frac{B''}{B} + \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{A'}{A}, && (12)\\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{2}\frac{r}{A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{A}, && (13)\\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}. && (14)
\end{aligned}
$$

Solutions statiques à symétrie sphérique

- Désormais, nous appliquerons ces expressions dans des situations précises.
- Considérons d'abord la solution du vide décrivant l'espace-temps extérieur d'un objet statique à symétrie sphérique, par exemple une étoile

Solution du vide

- Considérons une configuration statique à symétrie sphérique sans matière (vide).
- Ainsi, $T_{\mu\nu} = 0$ et les equations se réduisent à,

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{15}$$

Solution du vide

- Les équations deviennent,

$$\frac{1}{2}\frac{B''}{A} - \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{B'}{A} = 0, \tag{16}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{B''}{B} + \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{1}{r}\frac{A'}{A} = 0, \tag{17}$$

$$1 - \frac{1}{2}\frac{r}{A}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{1}{A} = 0. \tag{18}$$

Solution du vide

- Une combinaison des équations conduit à,

$$\frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A}+\frac{B'}{B}\right)=0, \tag{19}$$

implying

$$A=B^{-1}. \tag{20}$$

- La constante d'intégration a été faite égale à 1 une fois que l'espace-temps est assymtotiquement plat: $A, B \to 1$ lorsque $r \to \infty$

Solution du vide

- Solution pour B (et pour A):

$$B = 1 + \frac{k}{r}, \tag{21}$$

avec une constante d'intégration k.

Solution du vide

- Pour avoir la limite newtonienne correcte on doit choisir,

$$k = -2\frac{GM}{c^2}, \qquad (22)$$

M étant la masse de l'étoile

Solution du vide

- La solution finale est:

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

- C'est la solution de Schwarzschild, la première solution exacte de la Relativité Générale.

Solution du vide

- Les coefficients métrique peuvent être écrits comme,

$$g_{00} = g_{rr}^{-1} = 1 + 2\frac{\Phi}{c^2}, \tag{24}$$

où

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \tag{25}$$

est le potentiel newtonien.

Interpretation de la solution de Schwarzschild

- La solution statique à symétrie sphérique trouvée en 1916 par Karl Schwarzschild (décédé la même année) décrit l'espace-temps créé par un objet statique à symétrie sphérique, par exemple une étoile.
- A partir de cette solution, il est possible d'évaluer les grandeurs suivantes :
  1. La précession des orbites planétaires, qui dans la théorie newtonienne sont des ellipses fixes ;
  2. La lumière courbée par un objet massif comme le soleil ;
  3. Le changement de fréquence de la lumière se propageant dans un champ gravitationnel.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Il y a une situation étrange dans cette solution. Si la masse M et le rayon R de l'étoile sont tels que,

$$2\frac{GM}{c^2R} < 1, \tag{26}$$

  et si cette condition se produit dans le vide, la métrique change sa signature de $(+---)$ à $(-+--)$, c'est-à-dire la coordonnée radiale r se comporte maintenant comme une coordonnée temporelle et la coordonnée temporelle t joue le rôle d'une coordonnée radiale.
- Pour cette raison, jusqu'à la décennie des années 50, il était très courant d'affirmer que la solution n'était pas physique dans la région où la condition ci-dessus était satisfaite dans le vide.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Le rayon à partir duquel ce changement de signature a lieu est donné par,

$$R_s = 2\frac{GM}{c^2}. \tag{27}$$

- Ce rayon est appelé le *rayon de Schwarzschild*.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Pour la Terre, le rayon qui satisfait cette condition est de quelques centimètres, très bien à l'intérieur à l'intérieur de la planète, où la solution n'a aucune valeur Suite.
- Pour le Soleil, le rayon est de quelques kilomètres, et la situation est la même. Mais, en principe, rien n'interdit l'existence d'un objet compact pour lequel la condition est satisfaite pour la région à l'extérieur de l'objet.
- Il faut remarquer que le rayon de Schwarzschild implique une singularité de la métrique.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- L'inversion de signature qui se produit lorsque r est plus petit que le rayon de Schwarzschild est à la base du concept d'un objet appelé *trou noir*.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Comment comprendre la solution de Schwarzschild pour $r < R_s$?
- Pour essayer de comprendre il faut en profiter du fait que la RG est invariante par une transformation arbitraire de coordonnée.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Considérons la section bi-dimensionnelle formée par les coordonnées (t, r)

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2. \tag{28}$$

- Ls coordonnées nulles décrivant la propagation de la lumière impliquent $ds^2 = 0$, conduisant à,

$$t = \pm \int \frac{dr}{1 - 2\frac{GM}{r}} \tag{29}$$

$$t = \pm \left[r + 2GM \ln |r - 2GM| \right] = \pm r^* \tag{30}$$

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Définissons les coordonnées nulles,

$$u = t - r^*, \quad (31)$$
$$v = t + r^*. \quad (32)$$

- La métrique prend la forme,

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) du\, dv. \quad (33)$$

- La coordonnnée u décrit un rayon de lumière emergent, et la coordonnée v décrit un rayon imergent.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Nous avons,

$$v - u = 2r^*, \tag{34}$$

conduisant à,

$$ds^2 = 2GM\frac{e^{-\frac{r}{2GM}}}{r}\, e^{\frac{v-u}{4GM}}\, du\, dv. \tag{35}$$

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Définissons,

$$\begin{aligned} U &= -e^{-\frac{u}{4GM}}, &(36)\\ V &= e^{-\frac{v}{4GM}}. &(37)\end{aligned}$$

- La métrique devient,

$$ds^2 = 32(GM)^3 \frac{e^{-\frac{r}{2GM}}}{r} dU\, dV. \quad (38)$$

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Écrivons maintenant,

$$U = T - X, \tag{39}$$
$$V = T + X. \tag{40}$$

- Nous obtenons finalement,

$$ds^2 = 32(GM)^3 \frac{e^{-\frac{r}{2GM}}}{r}(dT^2 - dX^2). \tag{41}$$

Interpretation of the Schwarzschild solution

- La forme finale de la métrique est conforme à la métrique de Minkowski, qui est une métrique plate.
- Il est clair qu'il n'y a maintenant une singularité qu'en $r = 0$: la singularité en $r = R_s$ a disparu.
- En fait, nous pouvons facilement identifier les vraies singularités dans une métrique donnée grâce aux invariants de courbure.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Puisque, nous considérons une solution du vide, le scalaire de Ricci R est nul, ainsi que les composantes du tenseur de Ricci, et par conséquent l'invariant de courbure construit à partir de celui-ci, comme $R_{\mu\nu}R^{\ mu\nu}$.
- Cependant, le scalaire de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, construit à partir du tenseur de Riemann est non nul (rappelons que le tenseur de Riemann est directement connexe avec la courbure).

Interpretation of the Schwarzschild solution

- En fait, un long calcul direct conduit à,

$$K = 48\frac{(GM)^2}{r^6}. \tag{42}$$

- On peut observer que le scalaire de Krestchmann est régulier en $r = R_s$ mais il diverge en $r = 0$.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- La transformation des coordonnées effectuée implique que la plage des coordonnées finales est,

$$-\infty < T, X < +\infty. \tag{43}$$

- Ainsi, la forme finale de la métrique couvre tout l'espace, sauf $r = 0$ où il y a une singularité.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Remarquons que, si $ds^2 = +a^2$, nous avons des hyperboloïdes de type temps et si $ds^2 = -a^2$, nous avons des hyperboloïdes de type espace.
- De plus, la courbe

$$r = 2\frac{GM}{c^2}, \tag{44}$$

correspond à l'horizon des événements, qui divise les régions I et III, ainsi que III et IV, étant semblable à la lumière.

Interpretation of the Schwarzschild solution

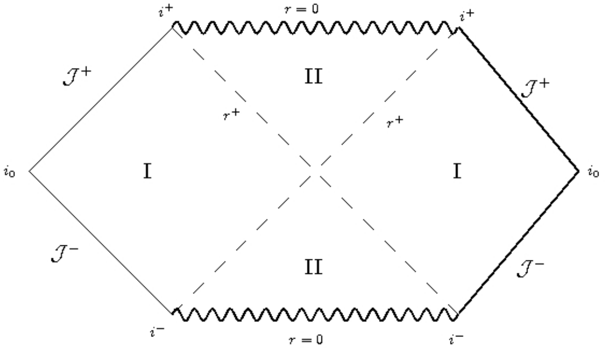
- La relation entre les coordonnées originales (t, r) et les coordonnées finales (T, X) est telle que,

$$2\left(\frac{r}{R_s} - 1\right) e^{\frac{r}{R_s} - 1} = R^2 - T^2. \tag{45}$$

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Toute cette formulation est appelée d'extension de Kruskal de la métrique de Schwarzschild.

Interpretation of the Schwarzschild solution



Interpretation of the Schwarzschild solution

- Les coordonnées originales ne décrivent que la partie I du diagramme espace-temps, la région extérieure du trou noir.
- La région intérieure est donnée par la région II. Les régions III et IV correspondent à l'inversion temporelle des régions I et II.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Un aperçu clair de ce qui se passe pour un observateur en chute peut être obtenu en utilisant les coordonnées d'Eddington-Finkelstein.
- Ces coordonnées mélanger les coordonnées u et r pour un observateur sortant, et v et r pour un observateur entrant.

Interpretation of the Schwarzschild solution

- Pour un observateur entrant, la métrique prend la forme,

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) dv^2 - 2dv\,dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (46)$$

- Pour un observateur sortant, nous avons,

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) du^2 + 2du\,dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (47)$$

Interpretation of the Schwarzschild solution