- Groupe de recherche en astrophysique, cosmologie e gravitation (Núcleo cosmo-ufes): www.cosmo-ufes.org
- Programme de Doctorat en Astrophysique, Cosmologie e Gravitation (PPGCosmo): ppgcosmo.cosmo-ufes.org

- Membres:
  1. Davi Rodrigues,
  2. Hermano Velten,
  3. Humberto Belich,
  4. Jaziel Goulart,
  5. Júlio Fabris,
  6. Oliver Piattella,
  7. Valerio Marra,
  8. Wiliam Ricaldi
  9. 3 Post-doctorant,
  10. 20 étudiants au master et au doctorat.

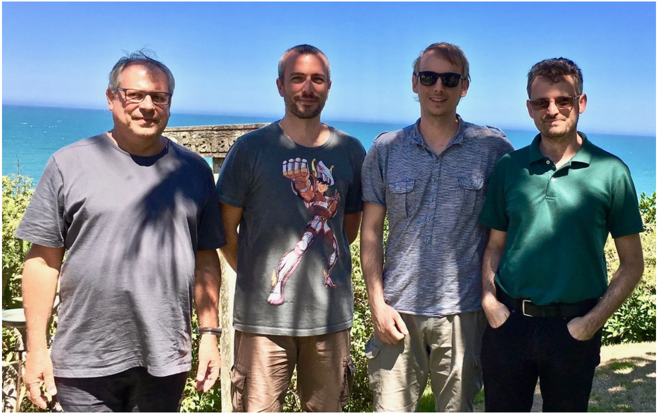
- Thèmes de recherche:
  1. Matière et énergie noire,
  2. Formation des structures dans l'univers,
  3. Cosmologie observationelle,
  4. Cosmologie primordiale,
  5. Trous noirs,
  6. Objets compactes,
  7. Effets quantiques en gravitation,
  8. Cosmologie quantique,
  9. Gravitation quantique,

- Conférences e écoles:
  1. Verão quântico (L'Été quantique), années impaires,
  2. Escola José Plínio Baptista de Cosmologia, années paires,
  3. Inverno Astrofísico (Hiver Astrophysique), tous les ans,
  4. Escola Patricio Letelier de Física-Matemática, années paires,
  5. Estate Quantistica (Italie), années paires.
  6. Encontro Afro-Franco-Brasileiro em Física e Matemática.

Cosmo-ufes

Cosmo-ufes

Cosmo-ufes



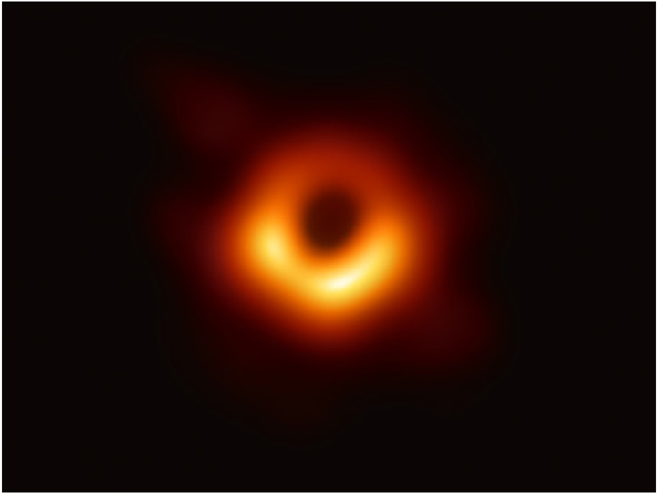
La Physique des Trous Noirs - Partie I

Júlio C. Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo

IMSP, Bénin, Juillet 2022

Trou noir dans la galaxie M87



- **Le trou noir est une des prévisions les plus importantes da la Théorie de la Relativité Générale.**
- **Il est au même temps une des structures la plus complexe et la plus simple qu'il existe dans la nature.**

- Trous noirs peuvent, en principle, avoir n'importe quelle masse, de l'ordre de grammes jusqu'à des milliards de masses solaires.
- Ils diffèrent par la masse, la charge, la rotation, et aussi par son procéssus de formation.

- Comment définir un trou noir?
- Une possible définition:

C'est une singularité dans l'espace-temps couverte par un horizon d'événements

Buracos Negros

- Mais, pour mieux comprendre cette définition (incomplète, d'ailleurs) il faut répondre aux questions:
  1. Qu'est que c'est cette singularité dans l'espace-temps?
  2. Qu'est que c'est un horizon d'événements?

- Il est commun dire que le trou noir est un objet stellaire avec un champ gravitationnel si intense que même la lumière ne peut pas en échapper.
- Si lumière même ne peut pas en échapper, il est forcément noir.

- Selon cette définition (très newtonienne) on peut dire alternativement qu'un trou noir a une vitesse d'échappement supérieure à celle de la lumière.

- Considérons un corps sphérique de rayon R avec une densité constante e masse totale égale à M.
- Le potentiel gravitationnelle pour um corps *teste* de masse m sur la surface du corps sphérique:

$$E_p = -G\frac{Mm}{R}. \tag{1}$$

- Si le corps de masse m a une vitesse radiale $\vec{v}$ il atteindra la hauteur h, telle que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{h} \tag{2}$$

- Cela est imposé par la conservation de l'énergie.

- La vitesse d'échappement v_e est définie comme celle pour laquelle la hauteur maximale est à l'infini, c'est–dire, l'objet se libère du champ gravitationnel du corps:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \tag{3}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{4}$$

- La plus grande est la masse du corps, la plus grande est la vitesse d'échappement.
- Pour une même masse, le plus petit est le rayon du corps, la plus grande est la vitesse d'échappement.

- Si la vitesse d'échappement est égale à la vitesse de la lumière,

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow \frac{2GM}{c^2 R} = 1. \tag{5}$$

Velocidade de escape

- Il faut garder cette expression:

$$\frac{2GM}{c^2 R} = 1. \tag{6}$$

- Pour la Terre ($M \sim 6 \times 10^{24}\,kg,\ R \sim 6.500\,km$):

$$\frac{2GM}{c^2R} \sim 10^{-9}. \tag{7}$$

- Pour le Soleil ($M \sim 2 \times 10^{30}\,kg,\ R \sim 700.000\,km$):

$$\frac{2GM}{c^2R} \sim 10^{-6}. \tag{8}$$

- Mais, la condition pour que la Terre soit un *corps obscur* (Mitchell et Laplace, début du siècle XIX) serait remplie si elle avait la même masse mais un rayon de quelques centimètres.
- Pour le Soleil il faudrait que le rayon était de quelques kilomètres.

- Mais cette définition de trou noir (en fait corps obscur, selon Laplace) est faite dans un context newtonien.
- Dans la théorie newtonienne, il n'y a pas de limite pour la vitesse d'un corps: il peut avoir des corps animés d'une vitesse supérieure à celle de lumière.
- En plus, dans la théorie newtonienne la géométrie est fixé comme celle d'Euclides, et le temps est un paramètre externe universel.
- Dans ce cas, il n'est pas possible de construire la notion d'horizon d'événements.

Trou noir

La classification

- Une classification des trous noirs peut être comme il suit:
  1. Trous noirs stellaires: $M \sim 3 - 30\,M_\odot$.
  2. Trous noirs supermassives, $M \sim 10^6 - 10^9\,M_\odot$.
  3. Trous noirs intermédiaires, $M \sim 10^3\,M_\odot$.
  4. Trous noirs primordiaux, avec des masses jusqu'à plus au moins une masse solaire.
  5. Micro-trous noirs, avec des masses d'ordre de grames.

  Frolov& Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics* (2011).

Notions de Relativité Générale

- Une notion centrale dans la théorie de la RG est la métrique:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{9}$$

- En principe, la métrique codifie les propriétés de l'espace-temps.

Notions de Relativité Générale

- L'espace tridimensionnel d'Euclides se définit para la métrique:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{10}$$

- En coordonnées sphériques,

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{11}$$

Notions de Relativité Générale

- L'espace-temps à quatre dimensions de Minkowski est définit par,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{12}$$

- En coordonnées sphériques,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{13}$$

Notions de Relativité Générale

- En RG la métrique a un caractère dynamique.
- En quelque sorte, est la *solution du problème*.

Notions de Relativité Générale

- La notion de curvature de l'espace-temps a une relation directe avec la non commutativité de las dérivées covariantes, qui sont définies par l'expressions,

$$V^\mu_{;\nu} = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu} V^\rho, \tag{14}$$

$$V_{\mu;\nu} = \partial_\nu V_\mu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} V_\rho. \tag{15}$$

- $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ est la connection:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \tag{16}$$

Notions de Relativité Générale

- La non commutativité des dérivées covariantes s'exprime par,

$$V^{\mu}_{;\rho;\sigma} - V^{\mu}_{;\sigma;\rho} = R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} V^{\nu}, \tag{17}$$

où $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de Riemann:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}. \tag{18}$$

- Le tenseur de Riemann caractérise la courbure d'une *varieté*.

Notions de Relativité Générale

- La dérivée directionnelle par rapport à un vecteur ξ^μ est définit par:

$$D_\xi V^\mu = \xi^\rho V^\mu{}_{;\rho}. \tag{19}$$

- Le vecteur V^μ est transporté parallèlement à lui même si,

$$V^\rho V^\mu{}_{;\rho} = 0. \tag{20}$$

- Si le transport parallèle d'un vecteur au longue d'une courbe fermée est zéro, l'espace en question est plat.
- Mais il est proportionnel au tenseur de Riemann si l'espace est courbe.
- Le tenseur de Riemann est directement lié à la courbure de l'espace.

Notions de Relativité Générale

- Une des propriétés du tenseur de Riemann est qu'une permutation cyclique de ses indices obéit à la relation,

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + R^{\mu}_{\sigma\rho\nu} + R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = 0. \tag{21}$$

- La permutation des dérivées covariantes donne lieu aux *identités de Bianchi*:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\lambda} + R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda;\rho} + R^{\mu}_{\nu\lambda\rho:\sigma} = 0. \tag{22}$$

Notions de Relativité Générale

- À partir du tenseur de Riemann on peut définir le tenseur de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \tag{23}$$

- et le scalaire de Ricci,

$$R = g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}. \tag{24}$$

Notions de Relativité Générale

- À partir des identités de Bianchi identities nous obtenons,

$$R^{\mu\nu}{}_{;\mu} - \frac{1}{2}R^{;\nu} = 0. \tag{25}$$

- Alternativement,

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0. \tag{26}$$

- Nous définissons le tenseur gravitationnel comme,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{27}$$

- Les relations précedentes impliquent que le tenseur gravitationnel $G_{\mu\nu}$ a divergence nulle.

Notions de Relativité Générale

- En RG, la géométrie est déterminée par la distribution de matière.
- La distribution d'énergie, d'impulsion ainsi que la pression est donnée para le tenseur d'impulsion-énergie.
- Pour un fluide de densité ρ, pression p et quadri-vitesse u^μ, le tenseur d'impulsion-énergie a la forme,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (28)$$

- La quadri-vitesse est définit par,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (29)$$

Notions de Relativité Générale

- Remarquez que l'équation de la géodésique est définit comme le transport parallel de la quadri-vitesse par rapport à d'elle même.
- La quadr-vitesse obéit à la condition,

$$u^\mu u_\mu = c^2. \tag{30}$$

Notions de Relativité Générale

- Les lois de conservation (énergie, impulsion, etc.) sont conséquences du fait que le tenseur d'impulsion-énergie a divergence nulle:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \tag{31}$$

- Ainsi est naturel identifier les équations de la gravitation comme,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{32}$$

- Ces équations définissent la théorie de la Relativité Générale.

Notions de Relativité Générale

- Les équations de la RG peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel en utilisant le Lagrangien,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + \mathcal{L}_m,) \tag{33}$$

où $\mathcal{L}_m$ est le Lagrangien pour le *secteur matériel*.

- Nous obtenons la RG si l'on définit,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{34}$$

- Les équations de la RG sont du deuxième ordre obéissant aux lois de conservation.