Star-produits et star-algèbres holomorphes

Louis Boutet de Monvel
Analyse Algébrique, Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
e-mail: `boutet@math.jussieu.fr`

Abstract. We describe a slightly enlarged definition of star-products and star-algebras which is better adapted to holomorphic objects and contains the calculus of pseudo-differential operators and Toeplitz operators. Using this we give a classification of holomorphic star-algebras on the cotangent bundle of a complex manifold equipped with its canonical Poisson bracket (i.e., locally isomorphic to the algebra of pseudo-differential operators). It turns out that in dimension ≥ 3 these are essentially trivial and correspond to algebras of twisted differential operators on X; in dimension 1 and 2 there are many more — exotic or monstruous in dimension 2 (i.e., having globally not much to do with algebras of twisted differential operators); more tractable but still not trivial in dimension 1. We describe in more detail the case of the projective line. Further details can be found in [3].

Résumé. Dans cet exposé nous rappelons la définition des star-produits et des star-algèbres. Notre définition est faisceautique pour s'adapter mieux aux objets holomorphes, et légèrement élargie (cf. §2) : les star-produits vivent sur des "cônes" de façon à inclure le cas important des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs de Toeplitz. Ces questions sont développées plus en détail dans [3].

Keywords: star-product, holomorphy, deformation

Mathematics Subject Classifications (2000): 16S32, 16S80, 32L05, 58J40

Cet exposé est dedié à la mémoire de mon ami Moshé Flato

1. Introduction

Commençons par rappeler la définition d'un star-produit : soit X une variété réelle ou complexe. Un star-produit semi-classique sur X, ou déformation formelle du produit usuel, est une loi d'algèbre associative et unitaire $(f,g) \to B(f,g)$ sur l'ensemble des séries formelles $f = \sum f_n(x)h^n$ à coefficients fonctions sur X, où $B = \sum h^n B_n$ est un opérateur bidifférentiel formel : dans un système de coordonnées locales sur X on a $B_n(f,g) = \sum b_{\alpha\beta}(x)\partial^\alpha f \partial^\beta g$. Unitaire signifie qu'on a $B(1,f) = B(f,1) = f$ pour toute f; l'associativité signifie qu'on a $B(f,B(g,h)) = B(B(f,g),h)$ pour toutes f,g,h. Plus loin (§2) nous utiliserons une définition un peu élargie, où h ne commute plus avec le reste, de façon à inclure dans la définition le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels ou de Toeplitz (cf. [5, 6]).

Si B est un star-produit, on lui associe un crochet de Poisson : $\{f,g\} = B_1(f,g) - B_1(g,f)$, terme dominant de la loi des commutateurs est un crochet de Poisson sur X (voir §2). Un problème de la théorie est de classifier les star-produits correspondant à un crochet de Poisson donné, et en particulier de montrer qu'il

G. Dito and D. Sternheimer (eds.), Conférence Moshé Flato 1999, Vol. 1, 109 – 120.

en existe. Lorsque X est réelle, ce problème a été résolu par M. De Wilde et P. Lecomte [10, 11] dans le cas symplectique, et par M. Kontsevich [19] dans le cas général. Kontsevich montre plus précisément qu'il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de star-produits sur X et les classes d'équivalence de familles formelles de crochets de Poisson $C = \sum h^n C_n$ sur X.

Les démonstrations dans le cas réel ne marchent pas sur une variété holomorphe, où on ne dispose pas de partitions de l'unité ou de voisinages tubulaires, et je ne sais d'ailleurs pas si un star produit global, associé à un crochet de Poisson donné, existe toujours, même dans le cas symplectique.[1]

Je crois néanmoins important de faire cette étude dans le cas complexe, parce que le calcul symbolique des opérateurs différentiels vit toujours sur une variété complexe (les symboles sont des polynômes), de sorte que les problèmes qui les concernent conduisent naturellement à des problèmes de star-produits holomorphes. De même il est important d'étudier les faisceaux de modules sur ces algèbres. Un autre problème important et de même nature est de comprendre le lien entre les faisceaux de modules sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels fournis par des constructions microlocales sur le fibré cotangent $T^*Y - \{0\}$ d'une variété Y privé de sa section nulle, et les $\mathscr{D}_Y$-modules : ce problème n'a de sens que sur un fibré cotangent complexe.

Ici nous nous limitons à l'étude et la classification des star-algèbres sur un fibré cotangent muni de sa structure symplectique standard, avec notre définition élargie, i.e. des algèbres localement isomorphes à la star-algèbre des opérateurs pseudo-différentiels. Il est aussi naturel de comparer ces star-algèbres aux algèbres d'opérateurs différentiels tordus (au sens de [2]).

Dans ce cas, la question d'existence ne se pose pas puisqu'on dispose de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels, à laquelle toute star-algèbre du type étudié est localement isomorphe, et on peut faire une étude assez complète de la classification. Celle-ci n'apporte rien de nouveau en dimension ≥ 3, où les star-algèbres correspondent exactement aux algèbres d'opérateurs différentiels tordus. En dimension 2 apparaissent des objets nouveaux et monstrueux ou exotiques. En dimension 1 la classification est de nouveau raisonable mais diffère de façon significative de celle des algèbres d'opérateurs différentiels tordus.

Cette classification est décrite en détail dans [3], et je me contenterai ici d'en montrer les traits les plus saillants. Il est intéressant de noter que cette classification est essentiellement triviale en dimension ≥ 3, et beaucoup moins en dimension 1 ou 2.

[1] Néanmoins M. Kashiwara dans le cas symplectique ([18]) et M. Kontsevich en général (communication orale) montrent qu'on peut toujours construire une gerbe équivalente à la catégorie des faisceaux des modules sur une telle algèbre.

2. Star-algèbres sur un cône

2.1. Cônes et symboles

Définition 1 *On appelle cône réel (resp. complexe) un fibré principal C^∞ (resp. holomorphe) Σ de groupe $\mathbf{R}_+^\times$ (resp. $\mathbf{C}^\times$). La base du cône est $B\Sigma = \Sigma/\mathbf{R}_+^\times$ (resp. $\Sigma/\mathbf{C}^\times$).* [2]

Un cône réel est isomorphe à un produit $B\Sigma \times \mathbf{R}_+^\times$. Un cône complexe est isomorphe à $L - \{0\}$ (L moins sa section nulle), où L est un fibré linéaire de rang 1 sur $B\Sigma$. Le fibré L n'a pas de raison d'être trivial.

Définition 2 *(i) On note $\mathscr{O}(m)$ le faisceau des fonctions homogènes de degré m sur Σ (holomorphes dans le cas complexe); c'est un faisceau sur $B\Sigma$.*
(ii) On note $\widehat{\mathscr{O}}$ le faisceau sur $B\Sigma$ des séries formelles (symboles) :

$$f = \sum_{m \le m_0} f_m \quad avec \quad f_m \in \mathscr{O}(m) \ (m \ entier,\ m \to -\infty)$$

Définition 3 *On note $\widehat{\mathscr{D}}_k$ ($k \ge 1$ entier), le faisceau sur $B\Sigma$ des opérateurs k-différentiels formels :*

$$P(f_1, \dots, f_k) = \sum_{m \le m_0} P_m(f_1, \dots, f_k)$$

où pour chaque entier $m \le m_0$, P_m est un opérateur k-différentiel, homogène de degré m pour les homothéties. Pour $k = 1$ on écrira simplement $\widehat{\mathscr{D}}$.

Localement Σ est un cône produit, on peut choisir des coordonnées homogènes x_j (réelles ou complexes, de degré 0) sur la base et r de degré 1 sur la fibre, et $P_m(f_1, \dots, f_k)$ est somme de monômes

$$a(x) r^m \, \partial_x^{\alpha_1} (r\partial_r)^{m_1} (f_1) \dots \partial_x^{\alpha_k} (r\partial_r)^{m_k} (f_k).$$

Il n'y a pas de restriction sur l'ordre de P_m. Dans la suite, pour éviter les confusions, "degré" signifiera toujours degré d'homogénéité par rapport aux homothéties, ou le degré du terme dominant, et "ordre" l'ordre comme opérateur différentiel; ainsi dans l'expression ci-dessus P_m est de degré m et d'ordre fini arbitraire; la série formelle $\sum P_m$ peut être d'ordre infini.

Un opérateur $P = \sum P_k \in \widehat{\mathscr{D}}$ est inversible si et seulement si son terme dominant $\sigma(P) = P_{m_0}$ est inversible (en particulier il doit être d'ordre 0). On note $\widehat{\mathscr{D}}_-^\times$ le faisceau des $P \in \widehat{\mathscr{D}}$ inversibles de degré ≤ 0 tels que $P(1) = 1$ (i.e. $P_0 = 1$, et P_m n'a pas de "terme constant" pour $m < 0$).

---

[2] Toutes les variétés considérées ici sont supposées paracompactes.

Remarque 1 Les faisceaux sont tout à fait inutiles pour la théorie réelle, mais indispensables dans la théorie complexe où il peut y avoir trop peu de sections globales.

Remarque 2 Sur un cône analytique il y a aussi une notion de symbole convergent (introduite par l'auteur dans [7] pour définir les opérateurs pseudo-différentiels analytiques). Ce sont en fait les plus importants et pour beaucoup de questions il est essentiel d'utiliser des symboles “convergents” plutôt que formels. Cependant pour les problèmes de classification qui suivent, il n'y a pas de différence qualitative significative entre symboles formels et symboles convergents, et je me limiterai aux symboles formels en évitant les technicalités supplémentaires de la convergence.

2.2. Star-algèbres sur un cône

Définition 4 *Une star-algèbre sur Σ est un faisceau $\mathscr{A}$ sur la base $B\Sigma$, localement isomorphe à $\widehat{\mathscr{O}}$ (le faisceau structural est $\widehat{\mathscr{D}}^{\times}_{-}$), muni d'une loi d'algèbre associative unitaire (star-produit) $f * g = B(f,g)$, localement un opérateur bidifférentiel formel.*

Localement $f * g = \sum B_m(f,g)$ où B_m est un opérateur bidifférentiel homogène de degré m ($m \to -\infty$), $B_0 = 1$. Le faisceau structural de groupes qui sert à recoller les repères locaux est $\widehat{\mathscr{D}}^{\times}_{-}$, le faisceau des automorphismes de $\widehat{\mathscr{O}}$ qui préservent les opérateurs bidifférentiels formels, et l'unité 1.

Dans le cas semi-classique, Σ est un cône produit $\Sigma = B\Sigma \times L$ ($L = \mathbf{R}_+$ ou $\mathbf{C}^{\times}$), $\mathscr{A} = \widehat{\mathscr{O}}$, h est homogène de degré -1, et la loi de produit ne comporte pas de dérivation en h, donc h est central et joue le rôle d'une constante absolue. La définition ci-dessus contient le cas semi-classique, et aussi celui des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels ou des opérateurs de Toeplitz. Ce cadre pour décrire les star-produits a été introduit dans [4].

Dans le cas réel, $\mathscr{A}$ est toujours isomorphe à $\widehat{\mathscr{O}}$, comme faisceau de groupe structural $\widehat{\mathscr{D}}^{\times}_{-}$, i.e. on peut définir un “symbole total” global (cela se voit facilement en recollant au moyen d'une partition de l'unité). Il n'en est plus de même dans le cas holomorphe, même dans des cas très naturels (par exemple pour les opérateurs pseudodifférentiels sur la sphère de Riemann $P_1(\mathbf{C})$, il n'y a pas de symbole total — voir ci-dessous). Aussi on ne peut pas éviter cette présentation faisceautique dans le cas complexe.

2.3. Crochet de Poisson

Le groupe structural $\widehat{\mathscr{D}}^{\times}_{-}$ qui sert à recoller est constitué d'opérateurs de terme dominant 1, qui préservent la filtration canonique de $\widehat{\mathscr{O}}$ et induisent l'identité sur gr $\widehat{\mathscr{O}}$. Donc une star-algèbre $\mathscr{A}$ a une filtration canonique, et il y a un isomorphisme canonique (calcul symbolique)

$$\operatorname{gr} \mathscr{A} \simeq \operatorname{gr} \widehat{\mathscr{O}} = \bigoplus \widehat{\mathscr{O}}(n)$$

$\operatorname{gr}\mathscr{A} \sim \operatorname{gr}\widehat{\mathscr{O}}$ est alors une algèbre de Poisson, dont le crochet de Poisson est donné par le terme dominant du commutateur :

$$\{f,g\} = B_1(f,g) - B_1(g,f).$$

Il s'agit d'un opérateur bidifférentiel alterné d'ordre 1, parce que c'est une dérivation par rapport au produit usuel, qui est le terme dominant de $B : B_0(f,g) = fg$; en outre il vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}$$

parce que le crochet $[a,b]$ de l'algèbre associative $\mathscr{A}$ est un crochet de Lie.

Remarque 3 L'existence d'un star-produit associé au crochet de Poisson d'un cône symplectique réel Σ a été prouvée par V. Guillemin et moi-même dans [6]. La preuve de M. Kontsevich pour un crochet de Poisson général s'adapte sans changement au cas conique ci-dessus (dans le cas réel) et montre que les classes de star-produits sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence de crochets de Poisson formels : $c = \sum_{k\leq -1} c_k$.

3. Star-algèbres sur un fibré cotangent

3.1. $\mathscr{E}$-algèbres

Soit X une variété complexe, et $\Sigma = T^*X - \{0\}$ le fibré cotangent, privé de sa section nulle, muni de sa structure symplectique canonique. La base est $B\Sigma = \Sigma/\mathbf{C}^\times = PX$, le fibré projectif associé à T^*X. Σ porte une star-algèbre canonique : l'algèbre $\mathscr{E}$ des opérateurs pseudo-différentiels, microlocalisation de l'algèbre des opérateurs différentiels de X : si on choisit des coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sur X et les coordonnées duales $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sur les fibres, un opérateur a un symbole total $a(x,\xi)$ et le produit est donné par la règle de Leibniz : pour $f, g \in \widehat{\mathscr{O}}$ on a

$$f * g = \sum \frac{1}{\alpha!}\, \partial_\xi^\alpha f\; \partial_x^\alpha g. \tag{1}$$

Le cocycle de recollement est celui qui est défini par les changements de coordonnées; c'est un cocycle parce qu'il recolle effectivement les symboles totaux (polynomiaux) des opérateurs différentiels pour donner le faisceau $\mathscr{D}_X$ des opérateurs différentiels.

Nous dirons que $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{E}$-algèbre si c'est une star-algèbre sur $\Sigma = T^*X - \{0\}$ associée au crochet de Poisson canonique. Il est élémentaire et connu qu'une $\mathscr{E}$-algèbre est localement isomorphe à $\mathscr{E}$; plus précisément si U est isomorphe à un sous-cône de $T^*\mathbf{C}^n$ dont la base est contractile et de Stein (par exemple l'ensemble $\{\xi_i \neq 0\} \subset T^*B$, où B est une boule de $\mathbf{C}^n$), toute $\mathscr{E}$-algèbre sur U est isomorphe à $\mathscr{E}$, et toute section de $\widehat{\mathscr{O}}(m)$ est le symbole d'une section de $\mathscr{A}_m$.

Par suite on obtient les $\mathscr{E}$-algèbres en recollant des modèles de $\mathscr{E}$. L'ensemble des classes d'isomorphismes de telles algèbres est

$$\mathrm{Alg}_{\mathscr{E}} \sim H^1(PX, \mathrm{Aut}\,\mathscr{E}), \tag{2}$$

l'ensemble des classes de cocycles à coefficients dans le faisceau des automorphismes de $\mathscr{E}$ (familles $(a_{ij}) \in \Gamma(X_{ij}, \mathrm{Aut}\,\mathscr{E})$, telles que $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, indexées par les intersections $X_{ij} = X_i \cap X_j$ d'un recouvrement assez fin $X = \bigcup X_i$; deux cocycles a, a' étant équivalents si, après raffinement des recouvrements, on a $a'_{ij} = b_i a_{ij} b_j^{-1}$ pour une famille $b_i \in \Gamma(X_i, \mathrm{Aut}\,\mathscr{E})$ convenable).

3.2. $\mathscr{D}$-algèbres

Soit X une variété complexe, $\mathscr{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels. Localement un automorphisme de $\mathscr{D}$ qui préserve les symboles est un automorphisme intérieur $P \to fPf^{-1}$ où f est une fonction holomorphe; on a $\mathrm{Int}\, e^f = \mathrm{Id}$ ssi f est constante, de sorte que le faisceau d'automorphismes de $\mathscr{D}$ est

$$\mathrm{Aut}\,\mathscr{D}_X \simeq \mathscr{O}_X^\times / \mathbf{C}^\times \simeq \mathscr{O}_X / \mathbf{C}. \tag{3}$$

Nous appellerons $\mathscr{D}$-algèbre (algèbre d'opérateurs différentiels tordus dans [2]) un faisceau d'algèbres sur X localement isomorphe à $\mathscr{D}_X$; l'ensemble $\mathrm{Alg}_{\mathscr{D}}$ des classes d'isomorphisme de telles algèbres est canoniquement isomorphe à l'ensemble $H^1(X, \mathscr{O}_X/\mathbf{C})$.

Une $\mathscr{D}$-algèbre définit bien sûr une star-algèbre sur PX, et il est naturel de comparer les ensembles $\mathrm{Alg}_{\mathscr{D}}$ et $\mathrm{Alg}_{\mathscr{E}}$.

3.3. Automorphismes

Pour comprendre comment on recolle des $\mathscr{E}$-algèbres pour former des objets globaux, il faut d'abord comprendre comment sont fait les automorphismes de $\mathscr{E}$.

Soit U un tel automorphisme : U préserve les symboles et l'unité, donc $U - 1$ est de degré -1 (i.e. abaisse le degré de 1). Alors le logarithme $D = \mathrm{Log}\, U$ est bien défini; c'est une dérivation de degré ≤ -1 de $\mathscr{E}$.

Si D est une dérivation homogène de degré $\leq k$, le symbole $\mathrm{gr}\, D = \sigma_k(D) :=$ δ est une dérivation homogène de degré k de l'algèbre de Poisson $\mathrm{gr}\,\mathscr{E} = \mathrm{gr}\,\widehat{\mathscr{O}}$, autrement dit un champ de vecteurs symplectique sur Σ, homogène de degré k. Il correspond à une 1-forme différentielle fermée α, homogène de degré $k+1$.

Il est élémentaire qu'une telle forme α est exacte, i.e. dérivée d'une fonction homogène, si $k+1 = 0$; et si $k+1 = 0$ elle est localement de la forme $c\frac{dr}{r} + df$, où f de degré 0, r est une fonction non nulle homogène de degré 1 fixée, $c = \langle \rho, \alpha \rangle = constante$ (ρ désigne le champ de vecteurs radial, générateur infinitésimal de l'action de $\mathbf{C}^\times$: $\rho = \sum \xi_j \partial_{\xi_j}$ si on a choisi des coordonnées locales).

Par approximations successives, on déduit de ceci que toute dérivation D de $\mathscr{E}$ est de la forme $s\,\mathrm{ad}\,(\mathrm{Log}\, P_1) + \mathrm{ad}\, Q$ où P_1 est elliptique de degré 1, $Q \in \mathscr{E}$, et que tout automorphisme de $\mathscr{E}$ est localement de la forme

$$U = (\mathrm{Int}\, P_1)^s \mathrm{Int}\, Q_0 \tag{4}$$

où P_1 est elliptique de degré 1, Q_0 elliptique de degré 0.[3] $\operatorname{Int} P$ désigne l'automorphisme intérieur $a \to PaP^{-1}$.

Si U est un automorphisme, nous noterons $\sigma(U)$ (symbole de U) la forme différentielle fermée homogène de degré 0 correspondant comme ci-dessus au terme dominant (de degré -1) de $\operatorname{Log} U$. Si $\sigma(U) = 0$, $U - 1$ est de degré ≤ -2, et il existe alors un unique P de degré 0 et de symbole 1 tel que $U = \operatorname{Int} P$:

Proposition 1 *Il y a une suite exacte de faisceaux de groupes sur PX :*

$$0 \to \mathscr{E}_-^\times \to \operatorname{Aut}\mathscr{E} \to \omega \to 0 \tag{5}$$

où $\mathscr{E}_-^\times$ est le faisceau des sections de $\mathscr{E}$ de symbole 1 ($\mathscr{E}_-^\times = 1 + \mathscr{E}_{-1}$) et ω est le faisceau (sur PX) des 1-formes fermées, homogènes de degré 0 sur Σ.

Si $\mathscr{A} \in \operatorname{Alg}_{\mathscr{E}} \simeq H^1(PX, \operatorname{Aut}\mathscr{E})$ le symbole $\sigma(\mathscr{A}) \in H^1(PX, \omega)$ est par définition l'élément déduit du cocycle qui définit $\mathscr{A}$.

3.4. Méthodes de calcul

Les calculs nécessaires pour étudier les star-algèbres dans le cadre ci-dessus utilisent une mixture de cohomologie non commutative (cf. [16]) et de cohomologie holomorphe, et la relation entre cohomologie et filtration. Il n'y a pas d'idée fondamentalement nouvelle — mais ça peut être un peu embrouillant. Je ne donne ici qu'un aperçu succinct, et renvoie à [3] pour les détails.

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de faisceaux de groupes sur un espace Y (A normal dans B), il y a une suite "exacte" de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(Y,A) \to H^0(Y,B) \to H^0(Y,C) \to \\ \to H^1(Y,A) \to H^1(Y,B) \to H^1(Y,C). \end{aligned} \tag{6}$$

cette suite est exacte au sens suivant :

(i) les H^0 sont des groupes et la suite est exacte aux 3 premières places.

(ii) Les H^1 sont des ensembles pointés. Le groupe $H^0(Y,C)$ opère sur $H^1(Y,A)$, et ses orbites sont les fibres de l'application $H^1(Y,A) \to H^1(Y,B)$. Il y a encore une relation renseignant sur les fibres de la dernière application $H^1(Y,B) \to H^1(Y,C)$: je renvoie à [16] ou [3].

On utilise cette suite avec $A = \mathscr{E}_-^\times$, $B = \operatorname{Aut}\mathscr{E}$, $C = \omega$; on utilise aussi les suites exactes $0 \to \mathscr{O}/\mathbf{C} \to \omega \to \mathbf{C} \to 0$, $0 \to \mathbf{C} \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}/\mathbf{C} \to 0$, qui servent à étudier ω, et qui engendrent des longues suites de cohomologie, puisqu'il s'agit de faisceaux commutatifs.

Dans le cas commutatif le lien entre filtration et cohomologie est décrit au moyen d'une suite spectrale, dont il ne reste que des bribes dans le cas non commutatif. Retenons cependant que si $H^1(X, \operatorname{gr}\operatorname{Aut}\mathscr{E}) = 0$ alors $H^1(X, \operatorname{Aut}\mathscr{E}) = 0$; (de même avec $\mathscr{E}_-^\times$); si $H^2(X, \mathscr{E}_-^\times) = 0$ (i.e. $H^2(X, \mathscr{O}(m)) = 0$ pour $m < 0$) alors l'application symbole : $H^1(X, \operatorname{Aut}\mathscr{E}) \to H^1(X, \omega)$ est surjective.

[3] elliptique = inversible.

4. Le cas $\dim X \geq 2$

Si $n \geq 2$, les fonctions homogènes de degré $m \in \mathbf{Z}$ sur $\mathbf{C}^n - \{0\}$ sont en fait polynomiales, en particulier elles sont nulles si $m < 0$ et constantes si $m = 0$, et par suite une $\mathscr{E}$-algèbre $\mathscr{A}$ n'a pas de section globale de degré < 0, et deux automorphismes qui ont même symbole sont égaux, et leur symbole commun “est indépendant de la variable cotangente” (i.e. coïncide localement avec un symbole d'automorphisme intérieur défini par une fonction $f(x)$ sur la base X).

Alors si $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ sont deux $\mathscr{D}$-algèbres, tout morphisme des $\mathscr{E}$-algèbres qu'elles définissent provient en fait d'un unique morphisme de $\mathscr{D}$-algèbres, de sorte que l'application $\mathrm{Alg}_{\mathscr{D}} \to \mathrm{Alg}_{\mathscr{E}}$ est un foncteur fidèle.

Si $n \geq 3$, c'est en fait une équivalence. En effet dans ce cas on montre facilement que si X est une boule (ou un domaine de Stein contractile), toute $\mathscr{E}$-algèbre sur PX est isomorphe à $\mathscr{E}_X$ (ceci est lié au fait qu'on a $H^1(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathscr{O}) = 0$ si $n \geq 3$). Donc si $\dim X \geq 3$ toute $\mathscr{E}$-algèbre $\mathscr{A}$ sur X s'obtient en recollant des $\mathscr{D}$-algèbres sur des morceaux de X, au moyen d'isomorphismes provenant d'isomorphismes de $\mathscr{D}$-algèbres : autrement dit $\mathscr{A}$ provient d'une $\mathscr{D}$-algèbre.

Pour $n = 2$ on a $H^1(PX, \mathrm{Aut}\,\mathscr{E}) = H^1(PX), \mathscr{E}_-^\times) \neq 0$ (il est même très gros), et il y a beaucoup de $\mathscr{E}$-algèbres (exotiques ou monstrueuses) qui ne proviennent pas de $\mathscr{D}$-algèbres. La classification peut se simplifier lorsque X est compacte : dans [3] on montre que si $X = P_2(\mathbf{C})$ les $\mathscr{E}$-algèbres proviennent de nouveau toutes de $\mathscr{D}$-algèbres. La situation est une peu plus compliquée lorsque X est un “tore” : $X = \mathbf{C}^2/\Gamma\,(\Gamma \sim \mathbf{Z}^4$ discret) (la dichotomie $n = 2, n \geq 3$ intervient de façon similaire dans l'étude des $\mathscr{E}$-modules localement libres de [9] et [8]).

5. Le cas $\dim X = 1$

Dans ce cas on a $PX = X$ ce qui simplifie l'étude. En particulier une $\mathscr{E}$-algèbre sur X s'obtient en recollant des exemplaires de $\mathscr{E}$ au moyen d'automorphismes de $\mathscr{E}$ (provenant de $\mathscr{D}$) sur un recouvrement de X, et est triviale (isomorphe à $\mathscr{E}_X$) si X est simplement connexe (isomorphe à un disque ou à $\mathbf{C}$). En revanche il y a beaucoup d'opérateurs pseudo-différentiels et d'automorphismes de degré < 0 de sorte que le lien entre $\mathscr{E}$-algèbres et $\mathscr{D}$-algèbres est plus compliqué. Je ne donnerai ici que quelques indications pour les cas où X est ouverte ou de genre ≥ 1 (je renvoie à [3] pour plus de détails), et me concentrerai sur le cas où X est la droite projective.

5.1. Courbes ouvertes et courbes de genre $g \geq 1$

Si X est ouverte (donc de Stein), elle possède un champ de vecteurs sans zéro ξ (le fibré tangent, comme tout fibré linéaire, est trivial d'après le théorème de Cousin). Si (s_{ij}) est un cocycle à coefficients dans $\mathbf{C}$ sur X, $((\mathrm{Int}\,\xi)^{s_{ij}})$ est un cocycle à coefficients dans $\mathrm{Aut}\,\mathscr{E}$ et on vérifie facilement que l'application $H^1(X, \mathbf{C}) \to \mathrm{Alg}_{\mathscr{E}}$ ainsi définie est bijective (on a $H^1(X, \mathscr{O}/\mathbf{C}) = 0$) : ainsi toutes les $\mathscr{E}$-algèbres non triviales sont “exotiques”.

Si X est de genre ≥ 3, on a $H^1(X,\mathscr{E}_-^\times) = 0$ ($H^1(X,\mathrm{gr}\,\mathscr{E}_-^\times)$ est nul car $\mathscr{O}(-1) \sim T^*X$ est un fibré “positif” donc $H^1(X,\mathscr{O}(k)) = 0$ pour $k < 0$). On a aussi $H^2(X,\mathrm{gr\,Aut}\,\mathscr{E}) = 0$ parce que X est de dimension complexe 1. Donc $\mathrm{Alg}_{\mathscr{E}} \to H^1(X,\omega)$ est bijectif. Dans la suite exacte (commutative)

$$\cdots \to H^0(X,\mathbf{C}) \to H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C}) \to H^1(X,\omega) \to H^1(X,\mathbf{C}) \to 0$$

la première flèche est bijective, parce que l'image du générateur de $H^0(X,\mathbf{C}) \sim \mathbf{C}$ correspond à la classe de Chern de T^*X qui est un générateur de $H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C})$. Finalement on a encore $\mathrm{Alg}_{\mathscr{E}} \sim H^1(X,\mathbf{C})$, mais de façon moins simple que précédemment : il y a des $\mathscr{D}$-algèbres non triviales, mais la $\mathscr{E}$-algèbre correspondante l'est; les $\mathscr{E}$-algèbres non triviales sont toutes “exotiques”, i.e. l'obstruction vient uniquement des exposants des automorphismes de recollement, mais le cocycle correspondant ne s'écrit pas aussi simplement que ci-dessus.

Si X est de genre 1 ($X \sim \mathbf{C}/\Gamma$, $\Gamma \sim \mathbf{Z}^2$), il possède un champ de vecteurs sans zéro, donc des $\mathscr{E}$-algèbres exotiques comme ci-dessus. On a toujours une application surjective $\mathrm{Alg}_{\mathscr{E}} \to H^1(X,\omega) \sim \mathbf{C}^3$, mais certaines fibres sont réduites à un point, d'autres très grosses (en particulier celles de $\mathscr{E}$). Ce cas est le plus compliqué et je renvoie à [3] pour les détails.

5.2. La droite projective

Soit $X = P_1(\mathbf{C})$ la droite projective. X est réunion des deux ouverts $X_0 = \{z \neq \infty\}$, $X_\infty = \{z \neq 0\}$, sur lesquels toute $\mathscr{E}$-algèbre (resp. $\mathscr{D}$-algèbre) est triviale. Donc les $\mathscr{E}$-algèbres (resp. $\mathscr{D}$-algèbres) sont classifiées par des cocycles réduits à une seule fonction $X_0 \cap X_\infty = \mathbf{C} - \{0\} \to \mathrm{Aut}\,\mathscr{E}$.

Les $\mathscr{D}$-algèbres sont classifiées par $H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C}) = H^2(X,\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. On note $\mathscr{D}_s$ ($s \in \mathbf{C} = H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C})$) la $\mathscr{D}$-algèbre définie par le cocycle $(\mathrm{Int}\, z)^s$.

En coordonnées homogènes x,y ($z = \frac{x}{y}$) on dispose du faisceau des opérateurs différentiels homogènes $\mathscr{D}^{hom}$, i.e. qui commutent avec le générateur des homothéties $\rho = x\partial_x + y\partial_y$; cette algèbre est engendrée par ρ et les opérateurs

$$e = x\partial_y, \quad h = x\partial_x - y\partial_y, \quad f = y\partial_x \tag{7}$$

qui vérifient les relations

$$[h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f, \quad [e,f] = h, \quad h^2 + 2(ef + fe) = \rho(\rho + 2). \tag{8}$$

$\mathscr{D}_s$ est isomorphe au quotient $\mathscr{D}^{hom}/(\rho + s)$; on peut y penser comme au faisceau des opérateurs différentiels sur le faisceau virtuel $\mathscr{O}(s)$ sur X des fonctions homogènes de degré s de x,y (qui n'existe que si s est entier).

Le résultat suivant est facile :

Lemme 1 *Si $X = P_1$ est la droite projective :*

(i) on a $H^0(X,\omega) = 0$, $H^0(X,\mathscr{E}_-^\times) = 0$, donc $H^0(X,\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}) = 0$ pour toute $\mathscr{E}$-algèbre $\mathscr{A}$.

(ii) On a $H^1(X,\omega) = 0$ et l'application $H^1(X,\mathscr{E}_-^\times) \to H^1(X,\mathrm{Aut}\,\mathscr{E})$ est bijective.

Dans la longue suite exacte de cohomologie

$$H^0(X,\mathscr{O}/\mathbf{C}) \to H^0(X,\omega) \to H^0(X,\mathbf{C}) \to H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C}) \to$$

$$\to H^1(X,\omega) \to H^1(X,\mathbf{C}) \to \cdots$$

on a $H^0(X,\mathscr{O}/\mathbf{C}) = 0$ car X ne porte pas de 1-forme holomorphe fermée non nulle; l'application exposant $H^0(X,\mathbf{C}) \to H^1(X,\mathscr{O}/\mathbf{C})$ est bijective parce que la classe de Chern de $\mathscr{O}(1)$ est $\neq 0$; on a $H^1(X,\mathbf{C}) = 0$ puisque X est simplement connexe. D'où $H^0(X,\omega) = H^1(X,\omega) = 0$.

Remarquons qu'un cocycle $q \in H^1(X,\operatorname{Aut}\mathscr{E})$ a un unique représentant "normalisé" :

$$q_{0\infty} = \sum_{0>p>2q} a_{pq} z^p \zeta^q \in \widehat{\mathscr{O}}(X_0 \cap X_\infty). \tag{9}$$

Ceci vient du fait que les deux champs de vecteurs $\partial_0 = \partial_z, \partial_\infty = \partial_{1/z}$ sont globalement holomorphes, elliptiques sur X_0 (resp. X_∞), et ont pour symbole ζ (resp. $-z^2\zeta$). Aussi, comme pour $H^1(X,\operatorname{gr}\mathscr{E}_-^\times)$, tout cocycle peut être réduit de façon unique à la forme ci-dessus.

Pour comparer les $\mathscr{D}$-algèbres et les $\mathscr{E}$-algèbres il est commode d'utiliser la suite exacte intermédiaire suivante. Soit $\operatorname{Int}\mathscr{E}_0 \simeq \mathscr{E}_0^\times/\mathbf{C}^\times$ le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathscr{E}_0$; on a une suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Int}\mathscr{E}_0 \to \operatorname{Aut}\mathscr{E} \to \mathbf{C} \to 0$$

d'où une surjection

$$H^1(X,\operatorname{Int}\mathscr{E}_0) \to H^1(X:\operatorname{Aut}\mathscr{E}) \tag{10}$$

dont les fibres sont les orbites de $\mathbf{C} = H^0(X,\mathbf{C})$ sur $H^1(X,\operatorname{Int}\mathscr{E})$ (par l'action $q_{0\infty} \to (\operatorname{Int}\partial_0)^s q_{0\infty} (\operatorname{Int}\partial_\infty)^{-s}$).

Lemme 2 *On a l'identité suivante (pour $k \in \mathbf{C}$) :*

$$(\operatorname{Int} z)^{-k-2} = (\operatorname{Int}\partial_0)^{k+1} (\operatorname{Int} z)^k (\operatorname{Int}\partial_\infty)^{-k-1}. \tag{11}$$

Preuve. Si k est entier positif, on a

$$z^{-k-2}(z^2\partial)^{k+1} = \partial^{k+1} z^k.$$

En effet les deux membres de cette égalité sont des opérateurs différentiels ordinaires d'ordre $k+1$, de même terme dominant $z^k\partial^{k+1}$, qui tuent tous les monômes $z^{-j}, 0 \geq j \geq -k$.

Le cas général en résulte, car l'identité (11) est polynomiale en s mod. $\mathscr{E}_m$, pour tout $m < 0$. ∎

On voit donc que $\mathscr{D}_s$ (resp. $\mathscr{D}_{-s-2}$) définissent des $\mathscr{E}$-algèbres $\mathscr{E}_s$, ($\mathscr{E}_{-s-2}$) isomorphes, bien qu'elles ne soient pas isomorphes comme $\mathscr{D}$-algèbres. Ceci est le seul cas où deux $\mathscr{D}$-algèbres non isomorphes sur $X = P_1$ donnent des $\mathscr{E}$-algèbres isomorphes : en effet l'algèbre des sections globales d'une $\mathscr{E}$-algèbre en est un invariant évident. Les sections globales e, h, f (avec les notations ci-dessus) aussi, si elles existent car elles sont bien déterminées à une constante près par leurs symboles, et les relations de commutation fixent complètement ces constantes. La relation $h^2 + 2(ef + fe) = s(s+2)$ montre alors que, comme il se doit, le nombre $s(s+2)$ est un invariant de la $\mathscr{E}$-algèbre.

En dernière remarque, examinons le problème suivant : existe-t-il un symbole total, i.e. le faisceau sous-jacent à une $\mathscr{E}$-algèbre est-il isomorphe à $\widehat{\mathscr{O}}$? Comme on a remarqué ceci est toujours vrai pour une $\mathscr{E}$-algèbre réelle, pour laquelle on peut recoller des symboles totaux locaux grâce à une partition de l'unité.

Dans le cas de $X = P_1(\mathbf{C})$: $T^*X - \{0\}$ a un revêtement à deux feuillets canonique par $\mathbf{C}^2 - \{0\}$: $(u, v) \to (z = u/v, \zeta = \frac{1}{2}v^2)$. Si $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{E}$-algèbre sur $\Sigma = T^*X$ elle se relève à $\Sigma' = \mathbf{C}^2 - \{0\}$ en une star-algèbre associée au crochet de Poisson canonique ($\{v, u\} = 1$), équivariante au-dessus de l'involution $(u, v) \to (-u, -v)$; noter que sur Σ', u et v sont de degré $\frac{1}{2}$. Si $\mathscr{A}$ a un calcul symbolique global, le relèvement définit un star-produit sur $\widehat{\mathscr{O}}(\Sigma')$.

Or sur $\widehat{\mathscr{O}}(\Sigma')$ il n'y a, à isomorphisme près, qu'une seule loi de star-produit associée au crochet de Poisson canonique : elle est engendrée par u, v soumis à la relation $[v, u] = 1$. À isomorphisme près elle est définie par la représentation $u \to u, v \to \partial_u$. Pour cette loi il y a beaucoup de sections globales (tous les polynômes de u, v); les sections globales e, h, f sont nécéssairement données par

$$e = -\frac{1}{2}u^2, \quad h = 2u * v + \frac{1}{2}, \quad f = \frac{1}{2}v^2 \tag{12}$$

parce que les symboles respectifs sont

$$\sigma(e) = -z^2\zeta = -\left(\frac{u}{v}\right)^2 \times \frac{1}{2}v^2, \quad \sigma(h) = 2z\zeta = 2(\frac{u}{v}) \times \frac{1}{2}v^2, \quad \sigma(f) = \zeta = \frac{1}{2}v^2$$

et que comme signalé plus haut ils déterminent e, h, f à des constantes additives près, que les relations de commutation achèvent de déterminer.

Ceci étant on obtient

$$h^2 + 2(ef + fe) = -\frac{3}{4} \qquad \left(s = -\frac{1}{2} \text{ ou } s = -\frac{3}{2}\right) \tag{13}$$

Ainsi les seules $\mathscr{D}$-algèbres qui possèdent un symbole total sont $\mathscr{D}_{-1/2}$ et $\mathscr{D}_{-3/2}$. En particulier il n'y a pas de symbole total sur $\mathscr{E}$ ou sur $\mathscr{D}$.

Références

1. Bayen F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D.: Deformation theory and quantization I, II, *Ann. Phys.* **111** (1978), 61–151.
2. Beilinson, A. and Bernstein, J.: Localisation de g-modules, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I Math.* **292** (1981), 15–18.
3. Boutet de Monvel, L.: Complex star-products, *Math. Phys. Analysis and Geometry* **2** (1999), 113–139.
4. Boutet de Monvel, L.: Star-Products on Conic Poisson Manifolds of constant rank, *Mat. Fiz. Anal. Geom. (Kharkov)* **2** (1995), 143–151.
5. Boutet de Monvel, L.: On the index of Toeplitz operators of several complex variables, *Invent. Math.* **50** (1978/79), 249–272.
6. Boutet de Monvel, L. and Guillemin, V.: The Spectral Theory of Toeplitz Operators, Annals of Mathematics Studies **99**, Princeton University Press, Princeton, 1981.
7. Boutet de Monvel, L. and Krée, P.: Pseudodifferential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **17** (1967), 295–323.
8. Carette, M.: Exotic $\mathscr{D}$-modules in dimension 2, Thèse Paris VI, 1999.
9. D'Agnolo, A. and Schapira, P.: The Radon-Penrose Correspondence II: Line Bundles and Simple $\mathscr{D}$-modules, *J. Funct. Anal.* **153** (1998), 343–356.
10. De Wilde, M. and Lecomte, P.: Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebras of arbitrary symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 487–496.
11. De Wilde, M. and Lecomte, P.: Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, in: M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber, (eds.), *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications (Il Ciocco 1986)*, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1988, pp. 897–960.
12. Fedosov, B. V.: A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Differential Geom.* **40** (1994), 213–238.
13. Frenkel, J.: Cohomologie à valeurs dans un faisceau non abélien, *C. R. Acad. Sci. Paris* **240** (1955), 2368–2370.
14. Frenkel, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), 135–220.
15. Gerstenhaber, M.: On the deformation of rings and algebras, *Ann. of Math.* **79** (1964), 59–103.
16. Giraud, J.: *Cohomologie non Abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
17. Gutt, S.: Equivalence of deformations and associated star-products, *Lett. Math. Phys.* **3** (1979), 297-309.
18. Kashiwara, M.: Quantization of Contact Manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **32** (1996), 1–7.
19. Kontsevich, M.: Deformation Quantization of Poisson Manifolds I, preprint q-alg/9709040.
20. Moyal, J.: Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **45** (1949), 99–124.
21. Vey, J.: Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), 421–454.
22. Weinstein, A.: Deformation quantization, Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Exp. No. 789, Astérisque **227** (1995), 389–409.